UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL AZCAPOTZALCO

AREA DE MATEMÁTICAS

INFORME DE INFOCAB

PAQUETE DIDÁCTICO
2022-2024

ASIGNATURA
Cálculo Diferencial e Integral I

INTEGRANTES

René Ramírez Ruíz
Vladímir Camacho Moreno
Roberto Peña de la Rosa
José Calete Jácome

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), que a través del programa **INFOCAB** nos otorgó el apoyo económico para desarrollar nuestro trabajo, con clave del proyecto: **PB101522**.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN Y PRESENTACIÓN

El Paquete Didáctico que se presenta a continuación fue elaborado para los alumnos de Cálculo Diferencial e Integral I del Colegio de Ciencias y Humanidades. Está constituido por 39 prácticas, de las cuales la práctica 1 a la 10 cubren la unidad de Procesos Infinitos; de la 11 a la 19 cubren la unidad de Razón de Cambio; de la 20 a la 31 cubren la unidad de Derivación y de la 32 a la 39 Aplicaciones Diversas. También como parte de los compromisos del Proyecto INFOCAB se anexan algunas nociones metodológicas con el propósito de iniciar al alumno en la elaboración de investigaciones sencillas (que se realizaron como parte del proceso de desarrollo del Paquete durante el primer año del Proyecto y luego se realizaron nuevas investigaciones más complejas en el segundo año del desarrollo del Proyecto INFOCAB, como puede comprobarse comparando las investigaciones elaboradas en el primero año por los alumnos y luego las que ellos mismos elaboraron durante el segundo año que contienen más conceptos y un desarrollo más elaborado.

Las prácticas deben usarse de manera que los alumnos las resuelvan de manera individual. No en el salón, sino que las piensen en casa y se expongan brevemente en clase. Por lo general en cada una de las prácticas se inicia con un comentario breve que señala cuál será el tema o el enfoque que se le dará al tema por estudiar. A continuación hay una introducción que indica las características más relevantes de la práctica luego se inician las actividades que el alumno debe desarrollar para que vaya comprendiendo la idea de desarrollar conjeturas y ponerlas a prueba. No se da un tratamiento teórico amplio de cada tema o concepto porque se trata de que el alumno explore, discuta, investigue y argumente en cada práctica, y en caso de que se detenga en el desarrollo del material puede asistir, y debe hacerlo, a asesorías con el profesor o que proponga preguntas en clase las que orientarán el desarrollo de la misma.

En general, una vez que se han concluido las actividades, hay una serie de exploraciones adicionales (a veces es la última actividad que en varios casos generaliza a todas las anteriores) en donde en varias ocasiones el grado de dificultad es mayor para resolverlas. Por tal motivo es necesario que el profesor revise el material previamente para que determine el enfoque y los propósitos señalados en la práctica y la orientación que les dará en clase. Al final de cada práctica, debe insistirse que la última actividad debe resolverse para que el alumno se “autocalifique” el grado de conocimientos que ha alcanzado y que el profesor puede usar como medio para determinar el grado de avance de los alumnos. La razón por la que no se nombró la última actividad como “Evaluación” (que en otros proyectos INFOCAB así se hizo) fue porque se descubrió que cuando un profesor empleaba las prácticas en clase, solamente atendía las actividades y dejaba la parte de Evaluación separada del resto de la práctica. Consideramos que es mejor que toda la Práctica contenga solamente Actividades para que el alumno las termine por completo y no haga un tratamiento aparte de la actividad final o evaluación, para que de esta manera complete toda la práctica. Es necesario que el alumno resuelva todas estas prácticas con el propósito de desarrollar gradualmente su autonomía, estudio y reflexión, pero nunca debe ser desatendido por el profesor, pues siempre será necesaria la presencia, orientación y apoyo de éste, sin intervenir en demasía, para que se garantice el buen uso de este Paquete Didáctico.

En general el Paquete ha considerado y cubierto todos los temas que contiene el Programa de Estudios Actualizado de Cálculo Diferencial e Integral I. Este paquete debe usarse considerando el Cálculo como una herramienta que apoya la resolución de problemas diarios y orientar al alumno a que realice una investigación apoyada con un Protocolo de Investigación sencillo con el que plantee un problema y lo resuelva. Como se considera en los Programas Actualizados, es necesario que el alumno desarrolle sus habilidades planteando el protocolo de investigación para aplicar los métodos de investigación para que reúna información con propósitos precisos. Con la aplicación sencilla de la metodología estadística, el alumno debe comprender la necesidad de investigar y por ello de descubrir, propósito para el cual están elaboradas estas prácticas. Queremos que el alumno mida, compare, examine, conjeture, contraste e investigue para que aprenda a tomar decisiones. Esperemos que estas prácticas, cumplan este propósito. Véanse los resultados en las investigaciones realizadas por los alumnos en la carpeta correspondiente.

El Paquete didáctico fue conformado y apoyado con el uso del software como Geogebra o con aplicaciones, como Desmos o Symbolab, pero sin comprometerse con ninguno de ellos, dado que el Programa de la materia no menciona específicamente alguno de ellos para el desarrollo de conceptos. Sin embargo, es necesario que el alumno use software y siempre contraste sus resultados con cálculos manuales, pero no demasiados, sino los suficientes para usar con mayor frecuencia el software. Este Paquete pretende una mayor reflexión con el apoyo de la tecnología para argumentar soluciones o conjeturas.

Finalmente debe señalarse que el Paquete también puede usarse en el salón de clase asignándole a cada alumno o grupo de alumnos dos prácticas por sesión o por semana. Otra posibilidad es que pueden usarse como tareas por desarrollar por los alumnos en casa y presentar resultados o exposiciones que propicien discusiones, dado que hay muchos problemas cuyo grado de complejidad es alto (Por ejemplo las aplicaciones). El profesor puede evaluarlas para decidir cuántas sesiones requiere el desarrollo de cada una de ellas, pero se sugiere que ninguna debe discutirse en más de 2 sesiones. Se recomienda que las evaluaciones del alumno se hagan por unidad y por el desarrollo conceptual que haya alcanzado (aprendizajes).

Como ya se dijo, en general la última actividad de cada práctica es una evaluación, pero esto no elimina la posibilidad de que el profesor agregue evaluaciones parciales sumativas si lo considera necesario, pero lo más importante es que el alumno debe desarrollar un trabajo de investigación durante el semestre, recopilando información histórica, matemática (que el profesor debe facilitar y orientar porque en los temas de investigación de Cálculo es muy fácil que el alumno encuentre información fuera de su alcance y esto lo confunda, por ejemplo en el caso de integración numérica que fue un tema de investigación, los alumnos comenzaron a consultar libros avanzados y había teoremas cuya compleejidad estaba fuera de su alcance, el profesor tiene que “adecuar” y “facilitar” este tipo de información para que los alumnos se vayan centrando gradualmente en el enfoque que se necesita para orientar debidamente a los alumnos. Esto implica una supervisión continua de la información que los alumnos encuentran semanalmente, discutirla y seleccionarla. Quizá, según el interés de los equipos de alumnos, en varios casos habrá que explicar temas adicionales que impliquen mayor complejidad para los avancen en su investigación.

Por ejemplo, cuestiones lógicas como teoremas, tipos de demostraciones, axiomas y temas nuevos que los alumnos hayan tratado de comprender y que tengan interés en profundizar.

El Protocolo básico de investigación que se usó para el desarrollo de las investigaciones que se presentan en el Informe es el siguiente:

1. **TÍTULO DE LA INVESTIGACIÓN.**
2. **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA** (justificación del problema matemático que presentarán).
3. **JUSTIFICACIÓN Y USO DE LOS RESULTADOS** (aplicabilidad).
4. **FUNDAMENTO O MARCO TEÓRICO** (fundamento histórico del problema (si lo hay), tratamiento y soluciones posibles, hipótesis que se deben hacer para simplificar el problema, temática adicional que debe investigarse para centrar el problema).
5. **OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN** (Qué se pretende obtener al resolver el problema de manera general y de manera específica).
6. **TIPO Y DISEÑO GENERAL DE LA SOLUCIÓN** (Resolución del problema con métodos, herramientas matemáticas o mediante apoyo con software. Esta resolución puede ser tan amplia como se quiera puesto que los problemas que se plantean pueden reorientarse y profundizarse. Sabemos que un problema matemático puede tener raíces en Grecia y posteriormente se puede ir mejorando la solución con métodos matemáticos actuales, pero esto debe planearlo el profesor conociendo los alcances y habilidades de cada equipo de alumnos).
7. **PLAN DE ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS** (métodos prácticos (laboratorios) y modelos de análisis de las soluciones. Programas a utilizar para el análisis de soluciones).
8. **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.**
9. **ANEXOS** (Instrumentos de recolección de información. Ampliación de métodos y procedimientos a utilizar, etc.).

Las mejoras y resultados en la comprensión de los alumnos en el protocolo antes mencionado y de cómo manejan los conceptos fundamentales de las Matemáticas, se pueden observar en las investigaciones que realizaron los alumnos que están en la carpeta correspondiente.

UNIDAD I

PROCESOS INFINITOS

PRÁCTICA 1. Procesos infinitos

Mediante una regla y un proceso iterativo se inscribirán cuadrados a triángulos para comprobar el área del triángulo.

Introducción

A partir de un triángulo rectángulo isósceles, se construirán cuadrados como se muestra en las figuras (2) y (3). En esta construcción la regla que se aplicará es la de tomar los puntos medios de los lados del triángulo y hacer la construcción del cuadrado.

Actividad 1.

Considera el siguiente triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales tienen longitud 1, como se muestra en la figura (1).

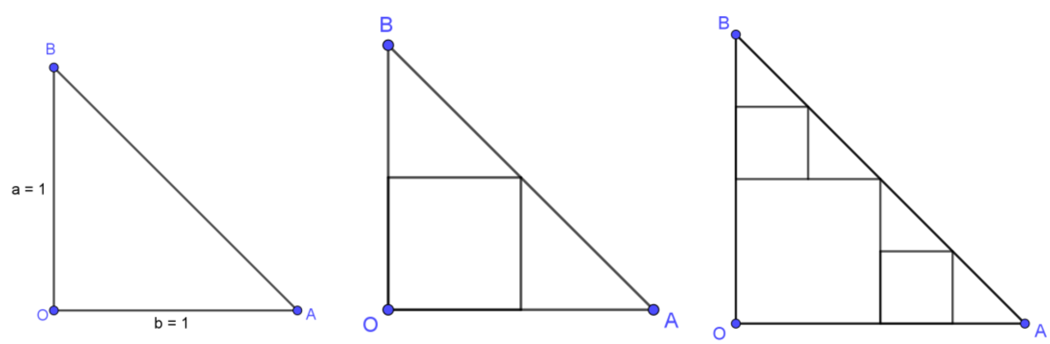


Figura (1) Figura (2) Figura (3)

1. Toma los puntos medios de los lados del triángulo y construye un cuadrado inscrito como se muestra en la figura (2).

2. Repite el proceso de la actividad 1 con los restantes triángulos.

3. Aplica el proceso de construcción una vez más en los tres lados de los triángulos que vayan quedando.

Actividad 2.

1. Cuenta el número de triángulos y de cuadrados que se forman en cada uno de los procesos en las etapas 0, 1, 2 y 3. Descubre y extiende el patrón numérico a través de las primeras cinco etapas. Generaliza para encontrar el número de triángulos y cuadrados que se forman en cada etapa.

Etapa	0	1	2	3	4	5	…	n
Triángulos	1	2	4					
Cuadrados	0	1	2					

2. ¿Cuál es la suma de las áreas de los cuadrados en la etapa 5? ¿en la etapa 8?

3. Representa este proceso mediante una suma infinita de las áreas de los cuadrados.

4. Si sombreas los cuadrados ¿cuál es el valor de la suma infinita?

5. ¿Qué relación tiene la suma infinita con el triángulo?

PRÁCTICA 2. Triángulo de Sierpinski

A continuación se presenta una modalidad en el triángulo de Sierpinski en la que se explorará algunos patrones numéricos.

Introducción

A partir de un triángulo equilátero, se construirán triángulos equiláteros más pequeños, como se muestra en las figuras (2) y (3). En esta construcción, la regla que se aplicará es la de trisectar los lados del triángulo y hacer la construcción de los triángulos más pequeños.

Actividad 1.

Utiliza estas figuras para explorar los patrones numéricos que surgen a medida que se realizan más y más iteraciones en la figura.

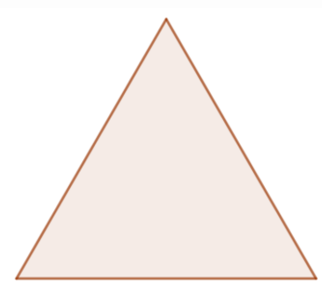


Figura (1)

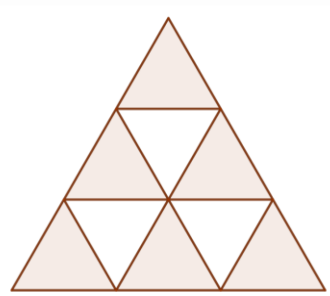


Figura (2)

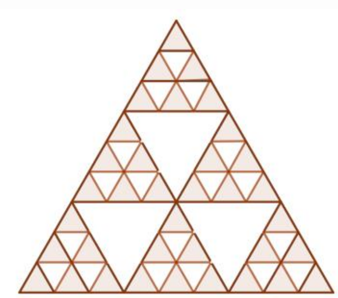


Figura (3)

1. Cuenta el número de triángulos sombreados en cada etapa del 0 al 2.

2. Amplíe el patrón para predecir el número de triángulos sombreados en las etapas 4 y 5. Completa la tabla.

ETAPA	0	1	2	3	4	5	…	n	
NÚMERO DE TRIÁNGULOS	1								

3. ¿Qué multiplicador constante se puede usar para pasar de una etapa a la siguiente? A medida que n se vuelve grande sin límite, ¿qué sucede con el número de triángulos sombreados?

Actividad 2.

Área de los triángulos.

1. Si en la etapa cero el área es 1, encuentra el área sombreada total en las etapas del 1 al 3

ETAPA	0	1	2	3	4	5	…	n
ÁREA	1							

2. Extiende el patrón para predecir el área total en las etapas 4 y 5. ¿Qué multiplicador constante se puede usar para pasar de una etapa a la siguiente? A medida que n se hace grande sin límite, ¿qué sucede con el área sombreada?

PRÁCTICA 3. Copo de Nieve

La repetición de un proceso iterativo a partir del segmento de línea al infinito genera una curva llamada Copo de nieve.

Introducción

El alumno llevará a cabo un proceso de construcción en el que al hacer iterativo el proceso, este generará una curva cuyo perímetro es infinito y su área es finita.

Actividad 1

A partir de un segmento dado, se construirá una curva llamada la curva de Koch. En esta construcción se triseca el segmento y se reemplaza cada segmento restante con el patrón que se muestra, Figura (2).

Figura (1)

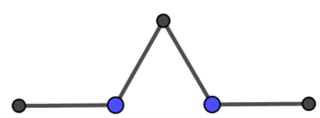


Figura (2)

Si la construcción se aplica un proceso recursivo a un triángulo equilátero se obtiene una curva llamada copo de nieve.

Actividad 2.

Considera el siguiente triángulo rectángulo. Figura (3). Aplica el proceso de construcción tres veces sucesivas para los tres lados del triángulo equilátero dado. Recuerda, cada segmento se transforma en cuatro segmentos más cortos en cada paso del proceso iterativo, como se muestra en la figura (4). Cada uno de estos segmentos más cortos es un tercio de la longitud del segmento que se reemplaza.

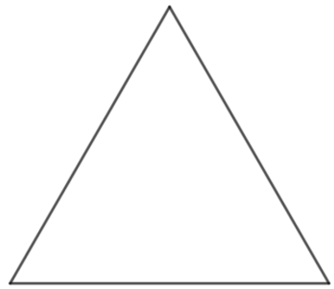


Figura (3)

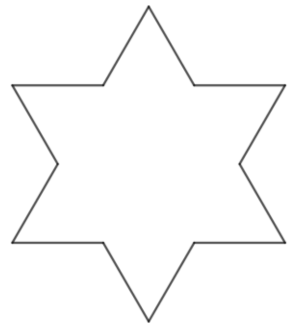


Figura (4)

Actividad 3.

Cuenta el número de segmentos en las etapas 0, 1, 2 y 3. Descubre y extiende el patrón numérico a través de las primeras cinco etapas de crecimiento. Generaliza para encontrar el número de segmentos para el nivel n.

Etapa	0	1	2	3	4	5	…	n
Segmentos								

Actividad 4.

Imagina que el proceso se repite al infinito. Visualiza y describe cómo cambia la figura.

Actividad 5.

Al pasar de una etapa a la siguiente, el copo de nieve crece en perímetro. Si cada lado del triángulo equilátero inicial es 1, encuentra el perímetro en cada una de las primeras cinco etapas de crecimiento. Generaliza para encontrar el perímetro para el nivel n.

Actividad 6.

Si el proceso de iteración continua al infinito. ¿cuál es el perímetro del copo de nieve de Koch resultante?

Actividad 7.

A medida que el copo de nieve crece, su área también aumenta. Comenzando desde un lado inicial de 1, encuentra el área en cada una de las primeras cinco etapas. Deja las respuestas en forma radical. En la etapa 0 el área es $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Actividad 8.

Generaliza para encontrar el área del nivel n. ¿Cuál es el área del copo de nieve?

Actividad 9.

¿Es el perímetro del copo de nieve de Koch finito o infinito? ¿Es su área finita o infinita?

PRÁCTICA 4. Ángulos pequeños

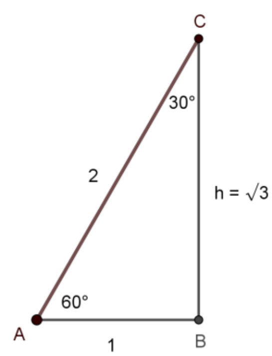
Aplicación de las fórmulas del seno y coseno de la mitad de un ángulo

Introducción

En esta práctica se aplicarán las fórmulas del seno y coseno de la mitad de un ángulo para que el alumno analice el comportamiento de los valores de estas razones trigonométricas a medida que el ángulo se hace cada vez más pequeño.

Actividad 1.

En la siguiente figura se muestra un triángulo rectángulo que se obtuvo al dividir un triángulo equilátero, mediante su altura, en dos triángulos rectángulos congruentes, la longitud de cada lado del triángulo equilátero es 2,



1. En el triángulo rectángulo aplica y obtén el $cos(60°)$
2. Aplica la fórmula $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}}$ del coseno de la mitad de un ángulo para comprobar que:

$$cos\left(\frac{60°}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Aplica nuevamente la fórmula del coseno de la mitad del ángulo para comprobar que:

$$cos\left(\frac{60°}{4}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

4. Aplica nuevamente la fórmula del coseno de la mitad del ángulo para comprobar que:

$$cos\left(\frac{60°}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

5. Sin realizar operaciones escribe los valores de:

a. $cos\left(\frac{60°}{16}\right)$

b. $cos\left(\frac{60°}{32}\right)$

Actividad 2.

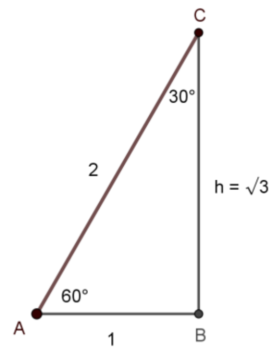
Por otro lado, Si la mitad del ángulo $\measuredangle x$ se puede escribir de la forma $\frac{x}{2n}$, donde n es un número natural, contesta las siguientes preguntas.

a. $n \longrightarrow \infty, \frac{x}{2n} \rightarrow ?$

b. $n \longrightarrow \infty,\ cos\left(\frac{x}{2n}\right) \rightarrow ?$

Actividad 3.

Considera nuevamente la figura y la fórmula del seno de la mitad de un ángulo, la cual es: $sen\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$



1. Con relación a la figura obtén el valor de: $sen(60°)$

2. Aplica la fórmula del seno de la mitad de un ángulo para comprobar los siguientes resultados

a. $sen\left(\frac{60°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

b. $sen\left(\frac{60°}{4}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

c. $sen\left(\frac{60°}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

3. Sin realizar operaciones escribe los valores de:

a. $sen\left(\frac{60°}{16}\right)$

b. $sen\left(\frac{60°}{32}\right)$

Actividad 4.

Contesta las siguientes preguntas.

a. Si $n \longrightarrow \infty$, ¿ $\frac{x}{2n} \rightarrow$?

b. Si $n \longrightarrow \infty$, ¿ $sen\left(\frac{x}{2n}\right) \rightarrow$?

PRÁCTICA 5. Cálculo de π

Aproximación al valor de π por medio de polígonos inscritos en una circunferencia de radio 1.

Introducción

La práctica consiste en aplicar los resultados de la práctica anterior para hallar una aproximación al número $\boldsymbol{\pi}$ por medio de polígonos regulares inscritos a una circunferencia de radio $r = 1$, iniciando con un triángulo equilátero e ir duplicando el número de lados del polígono.

Actividad 1.

Considera el triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio 1, como se muestra en la siguiente figura (1)

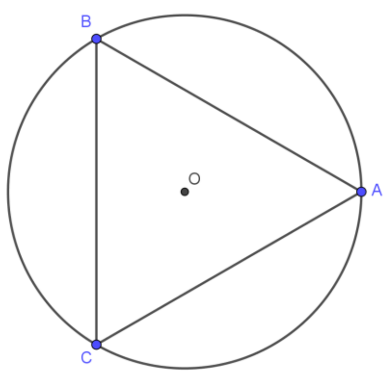


Figura (1)

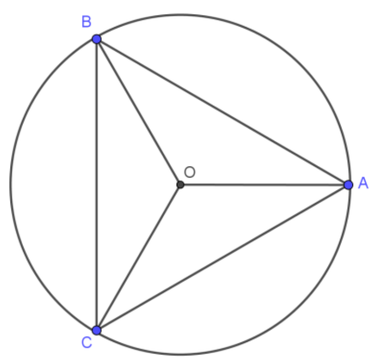


Figura (2)

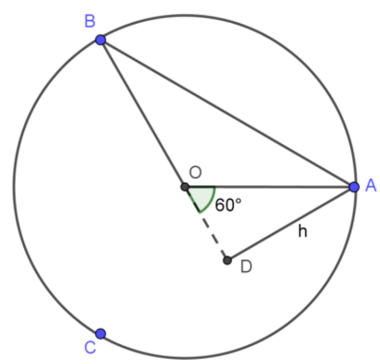


Figura (3)

Halla el área del triángulo $\triangle ABC$.

1. Dividir el triángulo $\triangle ABC$ en tres triángulos congruentes, como se muestra en la figura (2). Observa que la medida de cada ángulo central de cada triángulo es de 120°, es decir: $m\measuredangle AOB = m\measuredangle AOC = m\measuredangle BOC = 120°$

2. Dado que los triángulos son congruentes, entonces las medidas de sus áreas son iguales. Por lo tanto, si se obtiene el área de uno de ellos, se puede obtener el área del triángulo $\triangle ABC$. En la figura (3) se muestra el triángulo $\triangle AOB$, hallar el área de este triángulo.

a. Se traza la altura h. Observa que se forma el triángulo rectángulo $\triangle AOD$. figura (3)

b. La medida del ángulo $m\measuredangle AOD = 60°$, ¿por qué?,

c. La medida del lado $\overline{OA}$ es $m\overline{OA} = 1$, ¿por qué?

d. Aplicando el seno en el triángulo $\triangle AOD$ se tiene:

i. $sen(60°) = \frac{h}{\overline{OA}}$

e. De acuerdo con la práctica anterior ¿cuál es el valor del $sen(60°)$?

f. Al sustituir los valores en la relación $sen(60°) = \frac{h}{\overline{OA}}$, ¿cuál es el valor de h?

g. Se deduce que el área A_T del triángulo $\triangle AOB$ es:

$$A_T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

¿por qué?

Por lo tanto, el área del triángulo $\triangle ABC$ es tres veces el área del triángulo $\triangle AOB$: es decir

$$A_{\triangle ABC} = 3A_T = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.3$$

Actividad 2.

A partir del triángulo equilátero inscrito construir un hexágono inscrito,

Indicaciones:

1. Traza las bisectrices de los ángulos del triángulo las cuales intersectan a la circunferencia en los puntos A, B, C, D, E y F.
2. A continuación, se unen estos puntos para formar el hexágono.

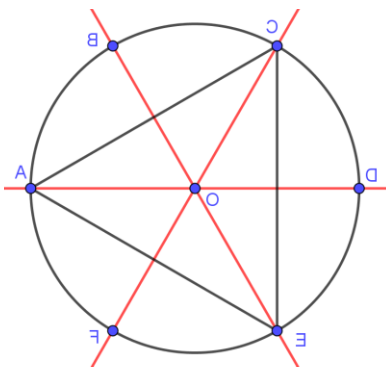


Figura (4)

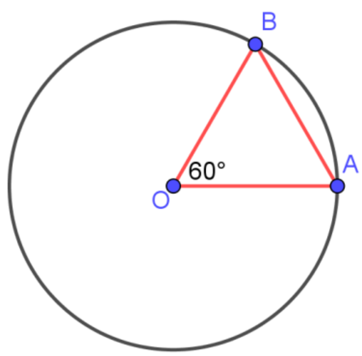


Figura (5)

Actividad 3.

Hallar el área del hexágono

1. Dividir el hexágono en seis triángulos congruentes
2. ¿Cuál es la medida de cada ángulo central de cada triángulo?
3. Se repite la indicación 2 de la etapa anterior, pero con el triángulo $\triangle AOB$ de la figura (5).

a. Se traza la altura h correspondiente al vértice B, formando el triángulo rectángulo $\triangle OGB$

b. ¿Cuál es a medida del lado $\overline{OB}$?

c. Aplica el seno del ángulo de 60° al triángulo rectángulo $\triangle OGB$, ¿cuál es el valor de la hipotenusa OB?, el valor $sen(60°)$ lo obtienes en la práctica anterior

d. ¿Cuál es el valor de la altura h?

e. Comprueba que el área A_T del triángulo $\triangle AOB$ es:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

4. Por lo tanto, el área del hexágono es:

$$A_{hexágono} = 6A_T = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.5980$$

Actividad 4.

A partir del hexágono inscrito construir un dodecágono (polígono de 12 lados) inscrito y hallar su área.

1. Construye el polígono y considera uno de los doce triángulos que se forman, como el que se muestra en la siguiente figura (6).

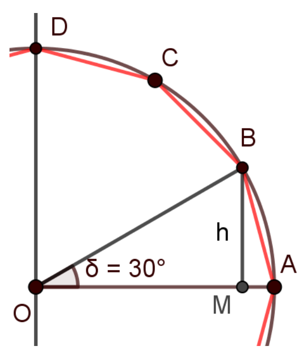


Figura (6)

2. Halla el valor de la altura h utilizando $sen\left(\frac{60°}{2}\right) = sen(30°)$.

3. Comprueba que el área del triángulo $\triangle AOB$ es:

$$A_T = \frac{1}{4}$$

4. Comprueba que el área del dodecágono es:

$$A_{dodecágono} = 12A_T = \frac{12}{4} = 3$$

Actividad 5.

En la siguiente figura se muestra solo uno de los 24 triángulos del polígono inscrito en la circunferencia.

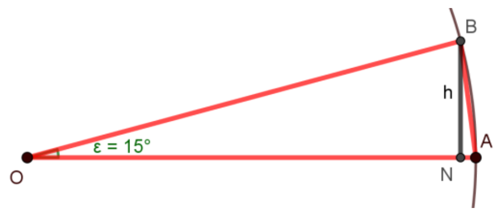


Figura (7)

Comprueba que el área del polígono de 24 lados es:

$$A_{24\ lados} = 24A_T = \frac{24(\sqrt{2-\sqrt{3}})}{4} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3.10582$$

Actividad 6.

comprueba que el área del polígono de 48 lados es:

$$A_{48\ lados} = 48A_T = \frac{48(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}})}{4} = 12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \approx 3.13262$$

Actividad 7.

Si se sigue duplicando el número de lados de los polígonos inscritos, ¿hacia que valor se aproximan las áreas de estos polígonos?

PRÁCTICA 6. Cálculo de π (segundo método)

Aproximación al valor de π por medio de polígonos circunscritos en una circunferencia de radio 1.

Introducción

La práctica consiste en aplicar los resultados de la práctica anterior para hallar una aproximación al número $\boldsymbol{\pi}$ por medio de polígonos regulares circunscritos a una circunferencia de radio $r = 1$, iniciando con un triángulo equilátero e ir duplicando el número de lados del polígono.

Actividad 1.

Circunscribir un triángulo equilátero a una circunferencia de radio *r* = 1 y obtener su área.

Indicaciones:

1. Inscribe un triángulo equilátero en una circunferencia de radio *r* = 1 y taza las bisectrices de sus ángulos. Figura (1).
2. Traza la recta tangente a la circunferencia en cada vértice del triángulo inscrito. Estas rectas tangentes se intersectan dos a dos en los puntos B, C, y D, los cuales son los vértices del triángulo circunscrito. Figura (2)

Actividad 2.

Hallar el área del triángulo circunscrito $\triangle BCD$

1. De la figura (2) se observa que el triángulo circunscrito está dividido en 6 triángulos rectángulos congruentes. De la misma forma que en la práctica anterior, concéntrate en uno de ellos. Por ejemplo, el triángulo $\triangle OAB$ de la figura (3) y obtén su área. Considera lo siguiente:

    a. ¿cuál es el valor del ángulo $\measuredangle AOB$?, ¿cuál es la base?, ¿cuál es la altura?

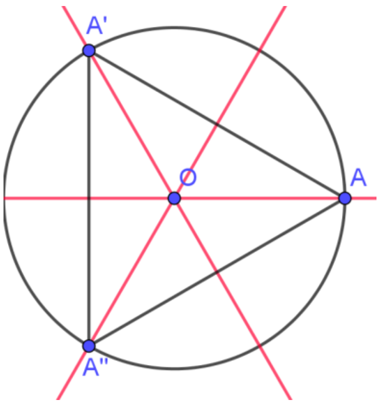


Figura (1)

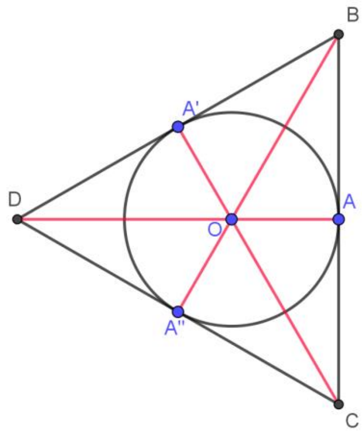


Figura (2)

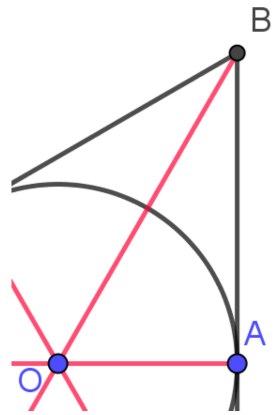


Figura (3)

b. Utiliza la tangente del ángulo $\measuredangle AOB$, aplica la identidad $tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$ y los valores obtenidos en la práctica 1 del seno y coseno, para obtener el valor de la altura. No emplees la calculadora

c. Obtén el área del triángulo $\triangle AOB$

2. Obtén el valor del área del triángulo $\triangle BCD$

Actividad 2.

Construir un hexágono circunscrito a la circunferencia de radio *r* = 1 y obtener su área.

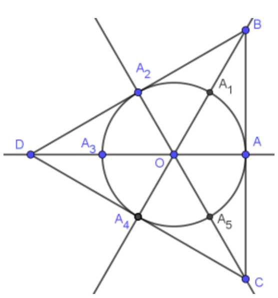


Figura (1)

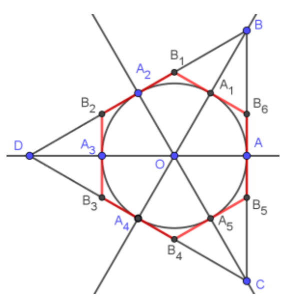


Figura (2)

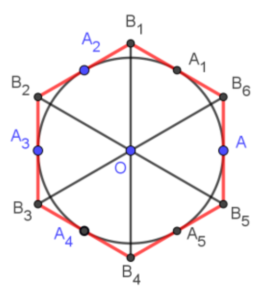


Figura (3)

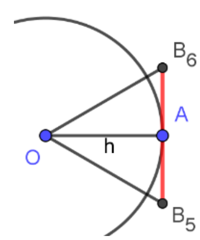


Figura (4)

1. Emplea el triángulo circunscrito de la etapa anterior.

2. Traza las bisectrices del triángulo. Estas intersectan a la circunferencia en los puntos $A, A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5$. Figura (1)
3. Traza la recta tangente a la circunferencia en el punto A_1, la cual intersecta a los lados del triángulo en los puntos $B_1,\ B_6$. Figura (2)
4. Traza la recta tangente a la circunferencia en el punto A_3, la cual intersecta a los lados del triángulo en los puntos $B_2,\ B_3$. Figura (2)
5. Traza la recta tangente a la circunferencia en el punto A_5, la cual intersecta a los lados del triángulo en los puntos $B_4,\ B_5$. Figura (2)
6. Une los puntos $B_1,\ B_2,\ B_3, B_4,\ B_5,\ B_6$, formando el hexágono. Figura (2).

Actividad 3.

Hallar el área del hexágono circunscrito

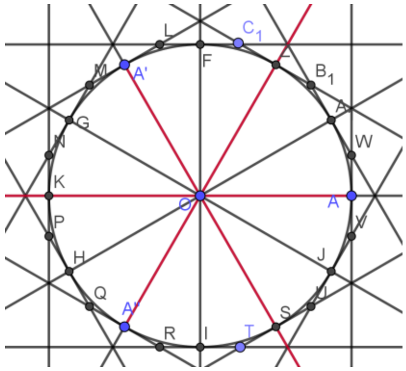
1. Considera el triángulo $\triangle B_5OB_6$ de la Figura (4) y obtén su área. Recuerda que tienes que usar trigonometría.
2. Halla el área del hexágono.

Actividad 4.

Obtener el área de un dodecágono circunscrito a una circunferencia de radio *r* =1.

1. Construir un dodecágono circunscrito a la circunferencia a partir del hexágono circunscrito de la etapa anterior. Utiliza la figura (3) de la etapa anterior. Esta actividad es opcional.

En la figura siguiente se muestra el dodecágono.



2. Considera uno de los triángulos de la Figura y obtén su área. Recuerda que tienes que usar trigonometría.
3. Halla el área del dodecágono.

Actividad 5.

Obtener el área de un polígono de 24 lados circunscrito a la circunferencia de radio r =1.

PRÁCTICA 7. Sumas inferiores y sumas superiores.

Aproximación al valor de π y del área del círculo por medio de sumas superiores e inferiores.

Introducción

La práctica consiste en construir rectángulos circunscritos a un círculo, utilizando la ecuación cartesiana de la circunferencia y el concepto de función, en particular la interpretación geométrica de los valores de la función, para hallar una aproximación al número $\boldsymbol{\pi}$ y al área del círculo.

Actividad 1.

Considera el plano cartesiano y a una circunferencia con centro en el origen y radio r, como se muestra en la siguiente figura (1)

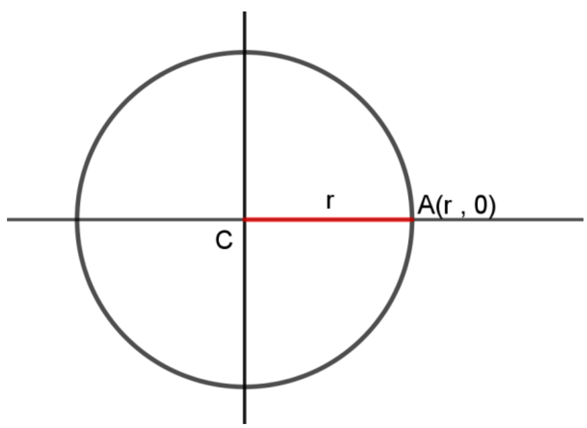


Figura (1)

Obtén una aproximación al número π y en consecuencia comprueba que el área del círculo es $A = \pi r^2$

Dado que la curva es simétrica con respecto a los ejes cartesianos, entonces para obtener la aproximación a π y por consiguiente la fórmula del área del círculo, el análisis que se realizará será en la curva que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la figura (2).

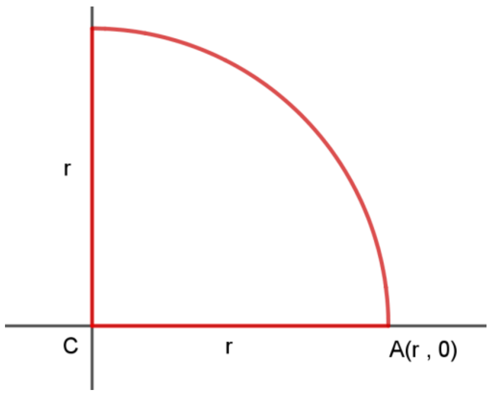


Figura 2

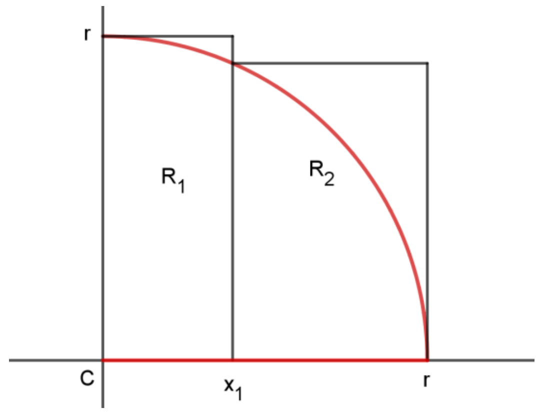


Figura (3)

Por otro lado, la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y radio *r* es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Despejando a la variable y se tiene:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

como la curva se encuentra en el primer cuadrante, está definida por la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ cuyo dominio es el intervalo $[0\,,\ r]$.

Ahora, dividir el intervalo $[0\,,\ r]$ en dos subintervalos con el punto $P = \{x_1\}$, donde

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 = r$$

Estos subintervalos son: $[0\,,\ x_1]\ y\ [x_1\,,\ r]$, de longitudes no necesariamente iguales y construir dos rectángulos circunscritos a la circunferencia, como se muestra en la figura (3)

a. Para calcular el área del rectángulo R_1 se observa que la base es: $x_1 - 0 = x_1$ y la altura es r, por lo tanto, su área A_1 es: $A_1 = rx_1$

b. Análogamente, la base del rectángulo R_2 es $r - x_1$ y la altura es $f(x_1) = \sqrt{r^2 - {x_1}^2}$, en consecuencia, su área A_2 es: $A_2 = (r - x_2)\sqrt{r^2 - {x_1}^2}$

c. Si S_1 representa la suma de las dos áreas, entonces:

$$S_1 = rx_1 + (r - x_2)\sqrt{r^2 - {x_1}^2}$$

A esta suma S_1se le llama ***suma superior*** y se simboliza como: $\overline{S_1}$. Se llama de esta manera porque el área de los rectángulos es mayor que el área del cuarto de circunferencia.

Si $x_1 = \frac{3}{7}r$, comprueba que:

1. El área A_1 del rectángulo R_1 es: $A_1 = \frac{3}{7}r^2$
2. El área A_2 del rectángulo R_2 es: $A_2 = \frac{4\sqrt{40}}{49}r^2$
3. La suma superior $\overline{S_1}$ de las áreas es: $\overline{S_1} = \frac{(21+4\sqrt{40})}{49}r^2 \approx 0.9448r^2$
4. Una aproximación al área del círculo es: $4\overline{S_1} = 4(0.9448)r^2 = 3.7794r^2$
5. Esta suma se representa por:

$$\overline{S_1} = \sum_{i=1}^{2} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x$$

Actividad 2.

Elige un valor más x_2 para tener un nuevo conjunto de puntos $P = \{x_1\,, x_2\}$ para crear tres subintervalos, con

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = r$$

Circunscribe tres rectángulos como se muestra en la figura (3) y obtén la suma de sus áreas, es decir:

$$\overline{S_2} = \sum_{i=1}^{3} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x$$

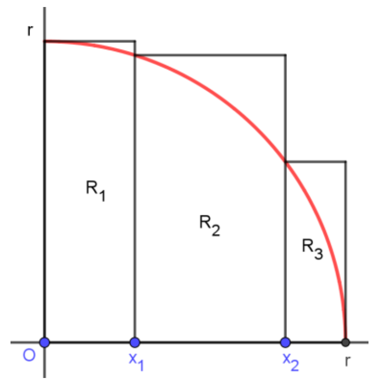


Figura (3)

Actividad 3

Repite el proceso anterior para los valores de $x_1 = \frac{3}{10}r$; $x_2 = \frac{4}{5}r$ y comprueba que:

- El área A_1 del rectángulo R1 es: $A_1 = \frac{3}{10}r^2$
- El área A_2 del rectángulo R2 es: $A_2 = \frac{\sqrt{91}}{20}r^2$
- El área A_3 del rectángulo R3 es: $A_3 = \frac{3}{25}r^2$
- La suma superior de las áreas $\overline{S_2}$ es: $\overline{S_2} \approx 0.8969r^2$
- Una aproximación al área del círculo es: $4\overline{S_2} = 4(0.8969)r^2 = 3.5878r^2$

Actividad 4

1. Circunscribe 4 rectángulos de igual base y obtén la suma $4\overline{S_4}$ de los cuatro.

2. Circunscribe 5 rectángulos de igual base y obtén la suma S1 los seis rectángulos y el valor de $4\overline{S_5}$

Actividad 5

Utiliza rectángulos de bases iguales y trabaja con Excel o cualquier otra hoja de cálculo para completar la siguiente tabla

Número de rectángulos circunscritos	4 veces la suma de las áreas de los rectángulos
0	0
1	$4r^2$
2	$4\overline{S_1} = 3.7794r^2$
3	$4\overline{S_2} = 3.5878r^2$
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

PRÁCTICA 8. Sumas inferiores y sumas superiores (continuación)

Continuación de la práctica anterior. Aproximación al valor de π y del área del círculo por medio de sumas inferiores.

Introducción

La práctica consiste en construir rectángulos inscritos al círculo, para hallar una aproximación al número $\boldsymbol{\pi}$ y al área del círculo.

Actividad 1.

De la misma forma que en la práctica anterior, considera la gráfica de la figura (1).

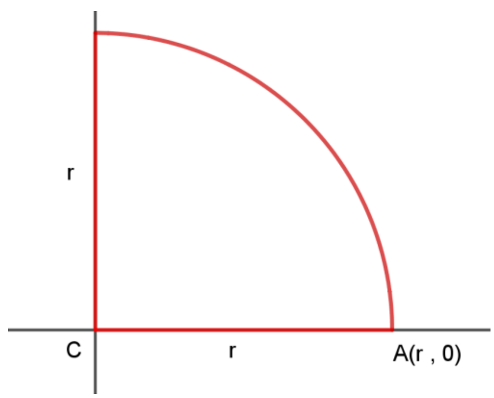


Figura (1)

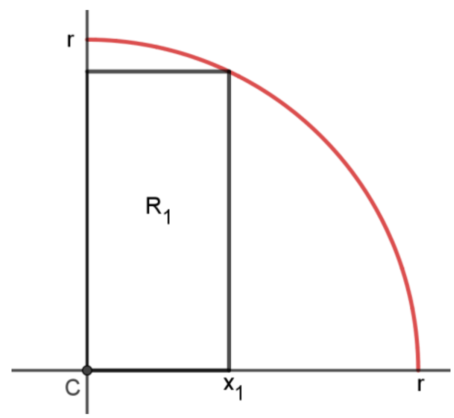


Figura (2)

A la suma de las áreas de los rectángulos inscritos se le llama ***suma inferior*** y se simboliza por $\underline{S_1}$. Se llama de esta manera porque el área de los rectángulos es menor que el área del cuarto de circunferencia.

1. Calcula el área $\underline{S_1}$ del rectángulo inscrito de la figura (2) si $x_1 = \frac{3}{7}r$
2. Obtén el valor de $4\underline{S_1}$

Actividad 2.

Repite el proceso de la actividad 1 para los valores de $x_1 = \frac{3}{10}r$; $x_2 = \frac{4}{5}r$ y obtén:

1. El área de los rectángulos inscritos
2. La suma inferior de los rectángulos
3. El valor de $4\underline{S_1}$

Actividad 3.

Utiliza Excel o cualquier otra hoja de cálculo y completa la siguiente tabla

Número de rectángulos circunscritos	4 veces la suma de las áreas de los rectángulos
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

PRÁCTICA 9. Área bajo una curva.

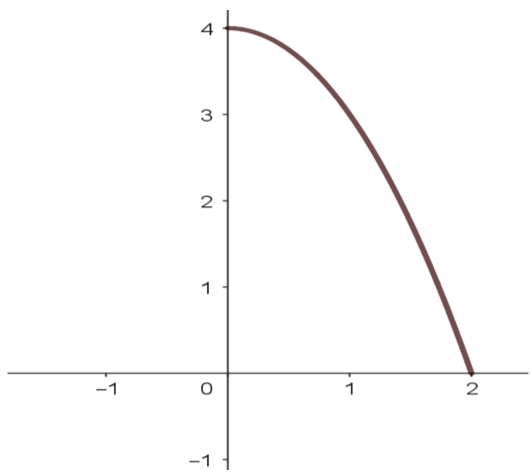
Aplicación a las sumas superiores e inferiores para hallar el área bajo una curva.

Introducción

Se estudiarán algunos conceptos básicos para La comprensión del Cálculo Diferencial e Integral mediante la resolución de problemas de área bajo una curva, algunas fórmulas importantes de sumas de números naturales, entre otros.

Actividad 1.

la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$ definida en el intervalo cerrado $[2\ ,\ 4]$, se muestra en la siguiente figura.



Con el conjunto $P = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots \ldots x_{i-1}, x_i, \ldots \ldots\ x_{n-1},\ x_n\}$ divide el intervalo cerrado $[0\ ,\ 2]$ en n subintervalos de igual longitud.

$$[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; [x_2, x_3] \ldots \ldots . . [x_{i-1}, x_i] \ldots \ldots . . [x_{n-1}, x_n]$$

Por otro lado, los puntos extremos de cada subintervalo son de la forma:

$x_0 = a; x_1 = a + \Delta x; x_2 = a + 2\Delta x; \ldots; x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x;\ x_n = b \ldots ..$ (1)

Halla la suma superior, la cual está expresada como:

$$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

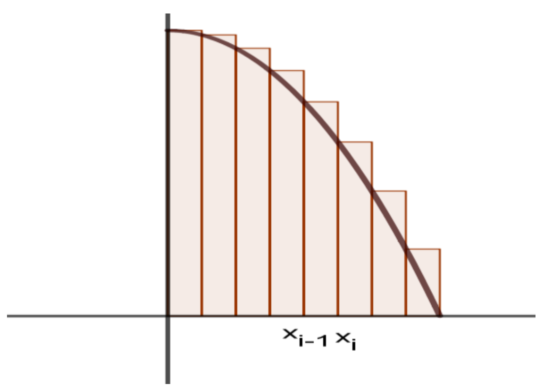
Dado que se tiene un número indeterminado de rectángulos circunscritos, para resolver el problema nos enfocaremos al análisis del rectángulo ubicado en el $i - esimo$ subintervalo, es decir en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \ldots\ldots (2)$$

Recuerda que $f(x_i)$ es la altura del $i - esimo$ rectángulo y como ya se vio en la relación (1)

$x_{i-1} = a + (i-1)\Delta x$ y $x_i = a + i\Delta x$, pero $a = 0$ por lo tanto $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$, $x_i = i\Delta x$ y Δx es la base.

En la siguiente figura se muestran algunos rectángulos en los que se marca el $i - esimo$ subintervalo



1. Dado que la función es $f(x) = 4 - x^2$ y $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ ¿cuál es el valor de la altura $f(x_{i-1})$? ¿cuál es el valor de la base Δx?
2. Al sustituir el valor de la altura y la base en la sumatoria comprueba que

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} [4 - (i-1)^2\Delta x^2]\Delta x$$

3. Al Desarrollar el binomio al cuadrado y efectuando el producto, comprueba que:

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} [4\Delta x - i^2\Delta x^3 + 2i\Delta x^3 - \Delta x^3]$$

4. Por las propiedades de la suma:

$$\bar{S} = 4\sum_{i=1}^{n} \Delta x - \sum_{i=1}^{n} i^2\Delta x^3 + 2\sum_{i=1}^{n} i\Delta x^3 - \sum_{i=1}^{n} \Delta x^3$$

5. Aplicando las fórmulas de las sumatorias y sustituyendo $\Delta x = \frac{2}{n}$ comprueba que $\bar{S}$ es:

$$\bar{S} = 4n\left(\frac{2}{n}\right) - \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\left(\frac{8}{n^3}\right) + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{8}{n^3}\right) - n\left(\frac{8}{n^3}\right)$$

6. Desarrollando los productos y reduciendo comprueba que $\bar{S}$ es:

$$\bar{S} = 8 - \frac{8}{6}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right) + 8\left(\frac{n^2 + n}{n^3}\right) - \frac{8}{n^2}$$

7. Mediante tablas de valores puedes comprobar que si

$$n \to \infty, entonces \begin{cases} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \to 2 \\ \frac{n^2 + n}{n^3} \to 0 \\ \frac{8}{n^2} \to 0 \end{cases}$$

8. Por lo tanto, comprueba que la suma superior es:

$$\bar{S} = \frac{16}{3}$$

PRÁCTICA 10. Aplicaciones.

Aplicación a las sumas superiores e inferiores para resolver problemas prácticos.

Introducción

Se presenta un problema de aplicación en el cual, el alumno tiene que obtener el modelo matemático que lo representa y finalmente aplicar los conceptos estudiados en las últimas prácticas.

Actividad 1.

El propietario de una cadena de panaderías recibe un cargamento de 12,000 kilogramos de azúcar que serán consumidas a un ritmo constante de 300 kilos por semana. Si el costo de almacenaje de la azúcar es de 5 centavos por kilogramo por semana, ¿cuánto tendrá que pagar el dueño de las panaderías por el costo de almacenaje en las próximas 40 semanas?

1. Obtén la función f(t) que relaciona el número de kilogramos de azúcar almacenados después de t semanas.
2. ¿Cuál es el dominio de la función?
3. Construye la gráfica de la función definida en su dominio
4. Divide el intervalo en n subintervalos iguales de longitud Δt e inscribe algunos rectángulos representando el $i-esimo$ subintervalo y determina el extremo en el que se encuentra el valor de la altura.
5. ¿Qué representa Δt? ¿qué representa $f(t_i)$? ¿qué representa $f(t_i)\Delta t$?
6. ¿Cuál es el costo de almacenaje en el $i-esimo$ subintervalo?
7. ¿Cuál es el costo total de almacenaje?

Actividad 2.

Comprueba que el costo de almacenaje es de $12,000

UNIDAD II

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

PRÁCTICA 11. Razón de cambio promedio.

Se inicia el estudio de la razón de cambio promedio.

Introducción

Se inicia el estudio de la razón de cambio promedio mediante un ejemplo de crecimiento poblacional.

Actividad 1.

En el 2015 egresaron 14300 alumnos del CCH. En 2016 egresaron 14700 alumnos y en 2017 egresaron 15100 alumnos. Calcula el incremento de egresados por año.

Para resolver este tipo de problemas, conviene que organices la información. Llamaremos E_1 al número de alumnos que egresaron en el primer año (2015), E_2 el número de alumnos que egresaron el segundo año (2016) y E_3 los egresados del tercer año (2017). Llamaremos A_1 el primer año de egreso (2015), A_2 el segundo año y A_3 el tercer año de egreso.

- **a.** Escribe los valores de E_k donde k=1, 2, 3. Escribe los valores también de A_k.
- **b.** Podemos calcular además las variaciones, (si aumentaron o disminuyeron) de egresados entre 2015 y 2016. Calcula el incremento de egresados entre estos dos años. Escríbelo usando la siguiente expresión:

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

- **c.** Calcula la variación (incremento) de egresados entre 2016 y 2017.
- **d.** En muchas ocasiones, para entender mejor un problema, se promedia una variable para entender su variación. Por ejemplo, si en una ciudad la temperatura aumentó 10 grados centígrados en 5 horas, entonces calculamos

$$\frac{10^{\circ}C}{5hr} = 2^{\circ}C/hr$$

Esto significa que la temperatura aumentó en promedio 2 grados centígrados por hora. A este cociente o división se le llama razón de cambio promedio.

- **e.** Usa el inciso anterior para calcular la variación promedio de egresados por año, hazlo primero entre 2015 y el 2016 y luego entre el 2016 y el 2017.
- **f.** Calcula la variación promedio de egresados entre 2015 y 2017. Compara este resultados con el que encontraste en el inciso e. ¿Qué observas?

Actividad 2

En un plano cartesiano donde en el eje *x* gradúes el tiempo (en años) comenzando en 0, y en el eje *y* gradúes la cantidad de egresados, Dibuja los tres puntos que representan la información de egresados del CCH por cada año considerado. ¿Qué significa la razón de cambio promedio que calculaste en los incisos anteriores? ¿Cómo puedes explicar las razones de cambio en la gráfica que dibujaste?

Actividad 3

1. Considera los datos de la población total del país que proporciona el INEGI

1895	**1900**	**1910**	**1921**	**1930**
12 700 294	13 607 259	15 160 369	14 334 780	16 552 722

1940	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**
19 653 552	25 791 017	34 923 129	48 225 238	66 846 833

1990	**1995**	**2000**	**2010**
81 249 645	91 158 290	97 483 412	112 336 538

- **a.** ¿Cuál será la razón de cambio promedio de la población de México?

- **b.** ¿Cuántas personas vivirán en el país en el año 2020?

PRÁCTICA 12. Razón de cambio promedio (continuación)

Se continúa el estudio de la razón de cambio promedio agregando el estudio gráfico de dicho concepto

Introducción

Se continúa el estudio de la razónde cambio promedio mediante la construcción de gráficas y sugiriendo que el cálculo mejora a medida que la variable independiente toma valores cada vez más cercanos.

Actividad 1

En un municipio de Zacatecas, Valparaíso, había en el 2020, 34261 habitantes, mientras que en el 2010 había 33223 habitantes. Calcula la variación de habitantes en dicho municipio en los 10 años en que se censó la población.

1. Organiza la información tal y como se hizo en la actividad 1 de la práctica anterior.
2. Calcula la razón de cambio promedio de la variación de pobación en el municipio de Valparaíso entre el 2010 y el 2020. Explícala.

Actividad 2

En un plano cartesiano donde en el eje *x* gradúes el tiempo (en años) comenzando en 0, y en el eje *y* gradúes la cantidad de habitantes en el municipo de Valparaíso, Dibuja los dos puntos que representan la información de habitantes del municipio de Valparaíso por cada año considerado. ¿Qué significa la razón de cambio promedio que calculaste? ¿Cómo puedes explicar la razón de cambio en la gráfica que dibujaste?

Actividad 3

1. Los datos sobre las ventas de una empresa que vende guitarras eléctricas se muestran en el siguiente cuadro.

Año	**1997**	**1999**	**2001**	**2003**
No. de guitarras vendidas	2000	2580	3100	3900

Asumiendo al año 1997 como $x = 0$ y que las ventas se aproximan a una función lineal:

a. Estima la razón de cambio de las ventas. Interpreta.

b. Determina una función lineal que ajuste los datos presentados.

c. El fabricante necesita vender 4000 guitarras durante el 2004 a fin de pagar un préstamo. Según el estudio realizado, ¿se alcanzará esta meta?

PRÁCTICA 13. Gráficas de razón de cambio promedio.

Se continúa estudiando la razón de cambio promedio aproximando los valores consecutivos de la variable independiente para sugerir una aproximación a la razón de cambio instantánea.

Introducción

Se comenzará a sugerir la idea de límite para obtener gradualmente la razón de cambio instantánea.

Actividad 1

En una alberca hay un volumen de 50 m^3 de agua antes de que se comenzara a llenar de agua. En 2 horas se llenó a 100 m^3, calcula:

1. El cambio en el volumen de agua. ¿Cuál fue la cantidad de agua que se agregó a la cantidad de agua que había inicialmente?
2. ¿En cuánto tiempo se agregó el agua?
3. ¿Cuánta agua se agregó según el tiempo empleado para ello? Según esto, ¿Cuál fue la razón de cambio promedio en el tiempo del agua que se agregó a la alberca?
4. Supongamos que el agua se está vaciando en la alberca de manera constante. Calcula la razón de cambio promedio con que se agrega agua a la alberca cada hora. Llena la tabla siguiente para resolver el problema:

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
0	50
1	
2	

5. Supongamos que el agua se está vaciando en la alberca de manera constante. Calcula la razón de cambio promedio con que se agrega agua a la alberca cada media hora. Llena la tabla siguiente para resolver el problema:

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
0	50
1/2	
1	
3/2	
2	

6. Supongamos que el agua se está vaciando en la alberca de manera constante. Calcula la razón de cambio promedio con que se agrega agua a la alberca cada 15 minutos. Completa la tabla siguiente para resolver el problema hasta la fila correspondiente a las dos horas de llenado:

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
0	50
1/4	
1/2	
3/4	
1	
…	

7. Observa la tendencia de los incisos anteriores. ¿Cuál sería la razón de cambio promedio de la cantidad de agua en el tiempo con que se llena la alberca si la calculas por minuto?

8. Observa la tendencia de los incisos anteriores. ¿Cuál sería la razón de cambio promedio de la cantidad de agua en el tiempo con que se llena la alberca si la calculas por segundo?

9. En una gráfica dibuja los puntos (volumen,tiempo) que se obtuvieron en cada tabla desde el inciso d hasta el inciso h. Has una gráfica por tabla. ¿Qué figura observas que se forma al unir los puntos?

Actividad 2

Deduce la ecuación de la recta que pasa por los puntos de cada gráfica que dibujaste en la actividad 1.

PRÁCTICA 14. Razón de cambio promedio (aproximación a razón de cambio instantánea)

Se continúa estudiando la razón de cambio promedio aproximando los valores consecutivos de la variable independiente para sugerir una aproximación a la razón de cambio instantánea usando una función.

Introducción

Para tener mejores aproximaciones a la razón de cambio instantánea, se usará una función matemática para usar sucesiones que se aproximen a un punto y obtener la noción de límite.

Actividad 1

Una alberca se llena de agua según la fórmula

$$V(t) = 0.5t + 10$$

Donde t es el tiempo de vaciado de agua (en minutos), V(t) es el volumen que la alberca tiene en el tiempo t (en metros cúbicos).

1. Usa la fórmula dada para llenar la siguiente tabla

Tiempo (minutos)	**Volumen (m^3)**
0	
1	
2	
3	
4	

2. Calcula la razón de cambio promedio entre dos tiempos consecutivos de la tabla.

3. Según el inciso anterior, ¿Qué significa en la fórmula el valor 0.5 ?

4. ¿Qué significa en la fórmula el valor 10? Observa la primera fila de la tabla cuando $t = 0$.

5. Dibuja la ecuación de la recta $V(t) = 0.5t + 10$ en una aplicación o en un software graficador. Explica en la gráfica el significado de los valores de 0.5 y 10.

6. Observa que se está calculando la razón de cambio

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

Donde (t_1, V_1) y (t_2, V_2) son dos puntos cualquiera de la tabla que construiste. Usa esta ecuación (razón de cambio promedio entre los dos puntos dados), para calcular la razón de cambio entre un par de puntos de la siguiente tabla. Geométricamente ¿qué significa la razón de cambio para este problema?

Tiempo (horas)	Volumen (m^3)
0	
1/2	
1	
3/2	
…	
4	

7. Repite el inciso anterior usando tiempos más pequeños, llena la tabla siguiente

Tiempo (horas)	Volumen (m^3)
0	

1/4	
1/2	
3/4	
1	
5/4	
…	
4	

8. Observa la tendencia de los incisos anteriores. ¿Cuál sería la razón de cambio promedio de la cantidad de agua en el tiempo con que se llena la alberca si la calculas por segundo?

9. En una gráfica dibuja los puntos (volumen,tiempo) que se obtuvieron en cada tabla en los incisos anteriores. Has una gráfica por tabla. ¿Qué figura observas que se forma al unir los puntos?

Actividad 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Si una compañía de seguros registró 50 "siniestros" el año pasado en un conjunto de 12000 clientes. ¿Cuál es la *tasa de accidentes*?

2. Supóngase que un auto viaja a lo largo de un camino recto a velocidad constante de 60 km/h. La velocidad del auto en el tiempo t (en horas) está dada por la función constante $v(t) = 60$ cuya gráfica es una recta horizontal. ¿Cuántos kilómetros recorre el auto entre $t = 1$ y $t = 7$?

3. El consumo de pescado depende del precio por kg. Si *k* es el precio por kilo en pesos, se encuentra que el volumen de venta *z* (kilos por día) está dado por $z = 35(15 - k)$. Calcula el incremento en el volumen de ventas correspondiente a un aumento en el precio de:

a. 12.00 a 13.00
b. 13.00 a 11.50
c. 11.50 a 12.50

4. Un balón esférico con radio inicial de 5 pulgadas comienza a desinflarse cuando $t = 0$ y su radio, *t* segundos después, está dado por $r(t) = \frac{60-t}{12}$ pulgadas.

a. Calcula la razón promedio de cambio del radio de los 10 a los 11 seg.

b. Calcula la razón promedio de cambio de los 10 a los 10.01 segundos.

c. Calcula, a centésimas, la razón a la que cambia el radio a los 10 seg.

PRÁCTICA 15. Razón de cambio promedio (continúa aproximación a razón de cambio instantánea)

Se continúa la práctica anterior pero usando una función cuadrática.

Introducción

Se usará ahora una función cuadrática para sugerir la noción de límite en un punto y calcular la razón de cambio instantánea.

Actividad 1

Una alberca se llena de agua según la fórmula

$$V(t) = 0.5t^2 + 10$$

Donde t es el tiempo de vaciado de agua (en minutos), V(t) es el volumen que la alberca tiene en el tiempo t (en metros cúbicos).

1. Usa la fórmula dada para llenar la siguiente tabla

Tiempo (minutos)	Volumen (m^3)
0	
1	
2	
3	
4	

2. Calcula la razón de cambio promedio entre dos tiempos consecutivos de la tabla, por ejemplo, hazlo para los puntos en 0 y 1; luego entre 1 y 2; luego entre 2 y 3 y finalmente entre 3 y 4, ¿qué observas? Para confirmar tu respuesta, dibuja en geogebra la función y dibuja cada razón de cambio promedio entre los puntos que

la calculaste (recuerda que dicha razón de cambio es la pendiente de la recta tangente que pasa por ambos puntos, calcúla cada recta y dibújalas en conjunto con la función.) ¿Qué observas acerca de la razón de cambio? ¿Sigue siendo la misma para cada para de puntos como ocurrió en la práctica anterior? Si no es así, ¿Qué indicaría acerca del problema el hecho de que la razón de cambio ya no es la misma entre dos puntos dados?

3. Como habrás observado, en el inciso anterior se han calculado razones de cambio promedio entre dos puntos dados ¿Qué significa cada una de ellas en el contexto del problema?. Dado que ellas cambian según los puntos elegidos, nos vamos a enfocar solamente en un punto, pues vamos a calcular la razón de cambio en ese punto o instante (dado que la variable x de la función en este caso es el tiempo t) Considera el valor del tiempo t = 2.

4. Recuerda que se está calculando la razón de cambio promedio

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

Donde (t_1 , V_1) y (t_2 , V_2) son dos puntos cualquiera de la tabla que construiste. Usa esta ecuación para calcular la razón de cambio promedio entre los dos puntos de la siguiente tabla.

Tiempo (horas)	Volumen (m^3)
1	
2	

Calcula ahora la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos y dibuja en geogebra la función V(t).

5. Repite el inciso anterior usando tiempos más cercanos, llena la tabla siguiente

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
1.5	
2	

Calcula ahora la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos y dibújala en geogebra con la función V(t).

6. Repite el inciso anterior usando tiempos más cercanos, llena la tabla siguiente

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
1.9	
2	

Calcula ahora la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos y dibújala en geogebra con la función V(t).

7. Repite el inciso anterior usando tiempos más cercanos, llena la tabla siguiente

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
1.99	
2	

Calcula ahora la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos y dibújala en geogebra con la función V(t).

8. Repite el inciso anterior usando tiempos más cercanos, llena la tabla siguiente

Tiempo (horas)	**Volumen (m^3)**
1.999	
2	

Calcula ahora la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos y dibújala en geogebra con la función V(t).

9. Repite el inciso anterior usando tiempos más cercanos, llena la tabla siguiente

Tiempo (horas)	Volumen (m^3)
1.9999	
2	

Calcula ahora la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos y dibújala en geogebra con la función V(t).

10. Observa que cada recta que dibujaste en los incisos anteriores es recta secante a la función V(t) porque siempre la corta en dos puntos. Es también cada caso una razón de cambio promedio de V con respecto de t. Llena la tabla siguiente con los datos que obtuviste en los incisos anteriores:

Tiempo (minutos)	Volumen (m^3)	Pendiente recta secante	Ecuación recta secante
1			
1.5			
1.9			
1.99			
1.999			
1.9999			

Dibuja ahora todas las rectas secantes a la función V(t) simultáneamente en GeoGebra. Observa que la tendencia es que las rectas secantes tienden a una recta que ya no es secante porque gradualmente los valores del tiempo tienden a acercarse a x = 2, lo que propiciaría que dicha recta terminará por ser recta tangente a la función V(x) en x = 2.

11. Usa la tabla del inciso anterior para contestar las siguientes preguntas: ¿A qué valor tiene el tiempo? ¿A qué valor tiende el Volumen? ¿ A qué valor tiende la pendiente de la recta secante (o razón de cambio promedio)? ¿A qué forma tiende la ecuación de la recta secante? ¿Qué tipo de recta se tendrá en $x = 2$?

Actividad 2

Resuelve los siguientes problemas

1. Sea $f(x) = x^2$.

- **a.** Calcula la pendiente de la recta secante correspondiente al intervalo (1, 2).
- **b.** Calcula la pendiente de la recta secante correspondiente al intervalo (1, 1.2)
- **c.** Calcula la pendiente de la recta secante correspondiente al intervalo (1, 1.001).
- **d.** Aproxima, a centésimas, la pendiente de la recta tangente en el punto (1, 1)
- **e.** Aproxima a centésimas, la pendiente de la recta tangente en el punto (2, 4)
- **f.** Aproxima a centésimas, la pendiente de la recta tangente en el punto (–5, 25).
- **g.** ¿Cuál sería la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, x^2)?

2. Un joven entrena para su competencia en los próximos juegos deportivos de la ciudad en una bicicleta fija durante una hora cada día, de modo que en cualquier tiempo t, medido en horas, su velocidad es $v(t) = 36t^2 + 3$ (km/h).

- **a.** Hallar la distancia ficticia recorrida por el ciclista durante su hora de entrenamiento.
- **b.** Se sugiere subdividir la hora en minutos, segundos, fracciones de segundo e ir calculando la distancia recorrida en cada período.
- **c.** Si realizamos la gráfica de la velocidad con respecto al tiempo en el intervalo [0, 1] en cada uno de los casos planteados, ¿qué podemos decir, con respecto a la distancia y el área de los rectángulos de medida de la base

igual a $\frac{1}{n}$ y altura coincidente con el valor de la velocidad definida, en algún punto del subintervalo cuando la cantidad de rectángulos tiende a infinito?

3. El *PNB* de un país es $PNB(T) = T^2 + 5T + 1000$ miles de millones de unidades monetarias, después de 1990. Determina a qué razón cambia el *PNB* en 1997 y la razón porcentual que cambia el *PNB* en 1998.

PRÁCTICA 16. Razón de cambio instantánea

Se continúa la práctica anterior pero usando una función cuadrática con un término lineal.

Introducción:

Se usará ahora una función cuadrática con un término lineal para sugerir la noción de límite en un punto y calcular la razón de cambio instantánea.

Actividad 1

Repite la práctica anterior (5) usando la ecuación de llenado de volumen siguiente

$V(t) = 4t^2 - 6t + 4$

Usa los valores de la siguiente tabla para que calcules y dibujes las aproximaciones de cada valor del tiempo, con las rectas secantes y la función $V(t)$ en GeoGebra.

Dibuja también la ecuación de la recta tangente en el punto $x = 3$, usando la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	**Volumen (m^3)**	**Pendiente recta secante**	**Ecuación recta secante**
2			
2.5			
2.9			
2.99			
2.999			
2.9999			

Actividad 2

Repite la actividad 1 usando ahora la siguiente tabla. Observa que de nuevo se deberá obtener la ecuación de la recta tangente pero ahora realizando una aproximación con una sucesión cuyos valores son mayores a $x = 3$.

Tiempo (minutos)	Volumen (m^3)	Pendiente recta secante	Ecuación recta secante
4			
3.5			
3.1			
3.01			
3.001			
3.0001			

¿Por qué ambas sucesiones tienden a $x = 3$, pero no se puede incluir este valor en la tabla? ¿Por qué es mejor usar la tabla para determinar mediante la tendencia el valor de la tangente de la recta en $x = 3$?

Actividad 3

Calcula ahora la razón de cambio instantánea (pendiente de a recta tangente a la función V(t)) en el punto $x = 0$. Cosntruye una tabla como en las actividades 1 y 2, y usa una sucesión que se aproxime por la izquierda a dicho punto; luego usa otra sucesión que se aproxime a 0 por la derecha para que verifiques que tus cálculos han sido correctos.

Dibuja en geogebra la recta tangente a V(t) en $x = 0$ para que verifique que los resutados fueron correctos.

Actividad 4

1. Supongamos que Martín Gramática (pateador de fútbol americano de los Bucaneros de Tampa Bay), tiene que anotar un gol de campo decisivo. Si la trayectoria del balón está definida por la ecuación $y = x - 0.02x^2 0.$ Determina:
   - **a.** La trayectoria del balón.
   - **b.** La distancia horizontal que recorre el balón.
   - **c.** ¿Cuál es el valor de x para que el balón alcance su máxima altura?
   - **d.** La ecuación que indica la razón del cambio instantáneo de la altura respecto al cambio horizontal en x = 0, 10, 15, 20, 25, 30, 50.
   - **e.** ¿Cuál es la razón del cambio instantáneo de la altura cuando el balón alcanza su altura máxima?

2. Un ganadero advierte que el costo (C) de producir x m^3 de leche está dado en función de $C(x) = 3000 + 100x$ pesos. El ingreso obtenido por la venta de esos mismos x m^3 está dado por $I(x) = 5000x - 0.05x^2$. El lechero, actualmente, produce y vende 270 m^3 de leche y quiere incrementar su producción a 320 m^3 de leche. Encuentra los incrementos resultantes en:
   - **a.** Costos.
   - **b.** Ingresos.
   - **c.** Utilidad.
   - **d.** La tasa de cambio promedio de la utilidad por m^3 extra producido.

3. El radio de una esfera es $r = r(t) = t^2 + 2t + 1$. Determina la razón de cambio del volumen respecto del tiempo en el instante t=1; luego hazlo en el instante t=2.

4. La posición de un cuerpo está dada por $P(t) = 240 + 240t - 80t^2$ m. (t en segundos)

a. Calcula la velocidad promedio de los 2 a los 3 segundos.
b. Calcula la velocidad promedio de los 2 a los 2.01 segundos.
c. Calcula la velocidad promedio de los 2 a los 3 segundos.
d. Aproxima, a centésimas, la velocidad instantánea a los 2 segundos.

PRÁCTICA 17. Límite de Fermat

Se construye el límite de Fermat para calcular la razón de cambio instantánea mediante un procedimiento formal.

Introducción

Se obtiene una expresión matemática (límite de Fermat) para calcular de manera práctica una razón de cambio instantánea.

Actividad 1

La construcción de la tabla que se vio en la práctica anterior es muy lenta lo que propicia que hallar la razón de cambio instantánea (o pendiente de una recta tangente en un punto) sea laboriosa. Existe otro método para hallar más directamente la razón de cambio instantánea (también llamada por brevedad “Derivada”), y que consiste en simbolizar algebraicamente el proceso y luego simplificarlo, lo cual simula el proceso que se hizo con sucesiones en la tabla.

1. Se simboliza la sucesión con x y el punto fijo como a. ($x = a$)
2. Se establecen los dos puntos con los que se calculará a pendiente de la recta secante (x, $f(x)$) y el punto fijo de tangencia (a, $f(a)$), con los que se calcula la pendiente de la recta (o razón de cambio promedio)
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
3. Se sustituyen $f(x)$ y f(a) y se procede a simplificar la expresión para hallar la razón de cambio promedio.
4. En la tabla se revisa a qué valor tiende x para hallar la tendencia de la pendiente de la recta secante, es decir ¿A qué valor tiende
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
Cuando x tiende a a? (esto último se escribe de manera más concisa como $x \to a$)

5. El valor al cual una sucesión tiende lo llamaremos límite, lo cuál se puede simbolizar de la siguiente manera

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Donde $\frac{df(x)}{dx}$ ya es la razón de cambio instantánea pues ya se halló el límite (o pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en un punto $x=a$)

6. Por ejemplo calculemos la razón de cambio instantánea de la práctica 4 usando el límite, para V(x) = 0.5x^2 + 10

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{0.5x^2 + 10 - [0.5a^2 + 10]}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{0.5(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} 0.5(x + a)$$

=0.5(a + a) $= a$

Y como hemos dicho que $x=a$, entonces la razón de cambio instantánea es

$$\frac{df(x)}{dx} = x$$

Actividad 2

Calcula la razón de cambio instantánea para el problema de la práctica 6 y para los problemas de Evaluación de las prácticas 5 y 6. Compara tus resultados con los obtenidos con la tabla. ¿Qué observas?

PRÁCTICA 18. Velocidad y aceleración

Se calcularán las razones de cambio instantáneas usando Fermat.

Introducción

Se definirá la razón de cambio como una derivada yse calculará la derivada para diversos problemas de aplicación.

Actividad 1

Si una función da la posición de un objeto en el tiempo t, se le llama función de posición $x(t)$. La razón de cambio instantánea

$$v = \frac{dx(t)}{dt}$$

Se le llama velocidad del objeto en cualquier tiempo t; la aceleración será dada por

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx(t)}{dt}$$

Y también hay una tercera derivada que permite calcular el cambio de aceleración:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}$$

Usa estas ecuaciones para resolver el siguiente problema

En un instante *t*, se dice que la partícula acelera si el signo de la aceleración es igual al signo de la derivada; si los signos son distintos diremos que la partícula desacelera. Si la posición es $x(t) = t^3$,

1. ¿Para qué valores de t la partícula acelera?
2. Misma pregunta si $x(t) = At^2 + Bt + C$.
3. De la misma manera, hacer los cálculos utilizando la velocidad al final de cada período.

4. Si realizamos las gráficas de la velocidad con respecto al tiempo en cada uno de los casos planteados, ¿qué podemos decir con respecto a la distancia y el área de los rectángulos de base igual a la longitud de cada intervalo y altura coincidente con el valor conocido de la velocidad en cada uno de ellos?

Actividad 2

Un punto se mueve sobre la curva $y = 8x^2$ de modo tal que su ordenada crece a razón de 4 unidades por segundo ¿Cuál es la velocidad con la cual está variando la abscisa?

a. Para $x = 2$.
b. Para $y = 2$.

Actividad 3

Resuelve los siguientes problemas.

1. La energía cinética de una partícula de masa *m* y velocidad *v* es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Una partícula de masa 10 gramos tiene en cierto instante t_0 una velocidad de 30 cm/seg. y aceleración de 5 cm/seg^2. Determina la razón de cambio de K respecto del tiempo en t_0.
2. Los beneficios de una empresa fueron $B(T) = 0.5T^2 + 20T + 30$ miles de unidades monetarias, después de su fundación en 1970. Determine:

a. El cambio en el beneficio que se genera en 2002.
b. El cambio porcentual en el beneficio que se genera en 2002.

PRÁCTICA 19. Aplicaciones

Se resolverán problemas de razón de cambio instantánea para probar su utilidad y se comenzará a sugerir la regla de la cadena.

Introducción

Se aplicarán los conceptos aprendidos en esta unidad además de que usará la regla de la cadena para resolverlos y plantear las razones de cambio instantáneas.

Actividad 1

Problema: Un globo esférico se infla a razón de 0.2 m^3/seg, ¿Qué variables están cambiando? ¿Cómo están relacionadas y cómo deben calcularse?

Sugerencias para resolver problemas de razón de cambio instantáneo:

1. Generalmente un probema contiene al menos un dato o información sobre una razón de cambio. En tal caso se deben identificar las variables que intervienen en ella y denotarla. Por ejemplo, si un problema dice “el cambio de posición en el tiempo de un móvil es de 8m/s” entonces la razón de cambio instantánea, donde x es la posición, que identifica esta información es

$$\frac{dx}{dt} = 8m/s$$

2. Obsérva que para calcular una razón de cambio instantánea sedebe usar el límite de Fermat, pero es necesario que se tenga una función para que pueda calcularse dicha razón. Además, en varias ocasiones la función puede ser obtenida o calculada con geometría o algún procedimiento algebraico para que se pueda hallar la razón de cambio o variación entre dos variables. También debe notarse que el límite sólo puede calcularse cuando la función que se obtuvo tiene una sola variable. Por ejemplo: $s(t) = 2t^2+3$ es una función de una variable, para la que

podrá calcularse $\frac{ds}{dt}$, pero si se tiene s(t) = 2 t^2+x+3 (función de dos variables), entonces debe hallarse una relación entre x y t para reducir s(t) a una función de una variable.

3. A veces se debe obtener una razón de cambio instantánea para cualquier valor de $x = a$ y relacionarla con una o más razones de cambio que pueden aparecer según los datos del problema. Adicionalmente nunca debe olvidarse que para resolver un problema el primer paso es comprenderlo, realizar un dibujo donde se represente la información y entenderla.

Según lo anterior, el problema da la siguiente información:

a. la primera es una razón de cambio, 0.2 m^3/seg, por lo que se tiene una razón de cambio del volumen (V) con respecto al tiempo (t), es decir

$$\frac{dV}{dt} = 0.2\ m^3/s$$

b. Pero también se sabe que el globo es esférico, por lo que debemos buscar una fórmula del volumen de una esfera y usarla para hallar una razón de cambio instantánea con respecto a la variable independiente.

Sabemos que el volumen depende del radio según la fórmula:

$$V(r)=4/3\pi r^3$$

Por lo que podemos calcular la razón de cambio del volumen con respecto al radio $r = a$. Calcula el límite para hallar dicha razón de cambio

$$\frac{dV}{dr}$$

Por tanto, tenemos 3 variables V, r y t. Ya tenemos dos razones de cambio, dado que a medida que el volumen cambia, también lo hacen el radio y desde luego el tiempo. Por lo tanto, falta la razón de cambio instantánea $\frac{dr}{dt}$.

¿Se puede calcular esta última razón de cambio usando las dos anteriores? ¿Cómo la obtendrías?

Actividad 2.

Tenemos 3 razones de cambio instantáneas:

$$\frac{dV}{dt}; \frac{dr}{dt} \text{ y } \frac{dV}{dr}$$

Si las consideramos como cocientes, entonces podemos multiplicarlas y obtener una a partir de las otras dos. Escribe una de ellas como el resultado de multiplicar las otras dos.

Con lo cual, podemos sustituir en la igualdad que escribiste las razones conocidas y despejar la razón de cambio desconocida y ya tenemos una fórmula. Obténla. Resuelve el problema siguiente.

Actividad 3.

Un balón de fútbol se infla a razón de 0.2 m^3/seg, calcula la variación del radio con respecto al tiempo en el instante en que el volumen de este mide 0.5 m^3.

Ahora ya podemos resolver un problema de razón de cambio instantánea. Resuelve el problema con la información anterior (recuerda que $t = a$ es cualquier instante)

Actividad 4.

Un balón de fútbol se infla a razón de 0.1 m^3/seg en el instante en que el radio de este mide 50 cm, calcula la variación de la superficie con respecto al tiempo.

Resuelve el problema anterior. Atención con dos detalles: las unidades y la nueva variable.

Problema: Dentro de un tanque cónico fluye agua a razón de $8m^3$/min, si la altura del tanque es de 12m y el radio de la base es de 6m. ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando tiene 4 metros de altura?

a) ¿Qué variables intervienen en el llenado del tanque?

b) Realiza un dibujo donde representes la información del problema.

c) Escribe la razón de cambio que está dada en el problema, es decir la que ya es conocida.

d) ¿Cuál es la razón de cambio que se te pregunta? Escríbela

e) ¿Qué forma geométrica tiene el tanque? Busca la fórmula del volumen de un cono, ¿De cuántas variables depende el volumen? ¿Puedes calcular la razón de cambio instantánea? ¿Por qué?

f) Supongamos ahora que el volumen del agua aumenta tomando la figura de un tanque cónico invertido. ¿Qué variables cambian al aumentar el volumen del agua dentro del tanque? (Sugerencia: son dos variables)

g) Para hallar la relación entre esas dos variables, dibuja el cono de perfil, de manera que se vea un triángulo invertido mediante un corte transversal. Dibuja también a cualquier altura un cono de agua dentro del tanque. Utiliza semejanza para que encuentres la relación entre las dos variables y sustituyas una de ellas en la fórmula del agua alojada en el tanque.

h) Calcula la razón de cambio instantánea.

i) Determina un producto de las tres razones de cambio para que despejes la que el problema te pide. Resuelve el problema.

Actividad 5

1. A un tanque que tiene la forma de un cono circular recto invertido de 4 m de radio y 16 m de altura entra agua a una razón de 50 cm^3/seg.

   a) ¿A que velocidad está subiendo el nivel del agua cuando este se encuentra a 4 m de altura?

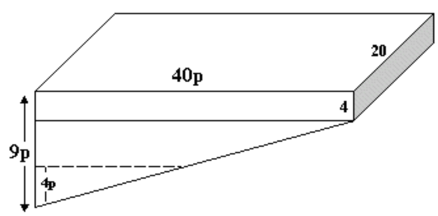
   b) ¿A que velocidad está cambiando el radio en ese mismo instante?

2. Una ciudad tiene forma de un cuadrado, se representa por x la longitud (en km) de un lado de la ciudad. A causa del crecimiento de la población y la construcción de suburbios x está creciendo a razón de 2% anual. Hallar la razón de incremento del área urbana cuando ocupa 0.5/km^2.
3. Un balón de fútbol se infla a razón de 0.1 m^3/seg en el instante en que el radio de este mide 50 cm, calcula la variación de la superficie con respecto al tiempo.
4. Una bola de nieve se forma de manera que su volumen aumenta a razón de 8 cm^3/min. Calcula la rapidez con la que el radio aumenta cuando la bola de nieve tiene 5 cm de diámetro.
5. Calcula la rapidez con que varía el área de un triángulo equilátero, si cada lado tiene 6 centímetros y está creciendo a razón de 4 cm/min.
6. Un vigilante colocado en la parte superior de un faro de 250 pies de altura observa un bote de motor que se acerca al faro a una velocidad de 20 pies/seg. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo formado por la visual con respecto al bote cuando este se encuentra a 300 pies de la base del faro?
7. Problema *del barco y el faro*. Un barco navega paralelamente a una costa recta a una velocidad de 20 kilómetros por hora y a una distancia de 6 km de la costa. ¿Cuál es la velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que disten 8 kilómetros al faro?
8. Cono *con agua*. Un tanque cónico de 3 metros de altura y 2 metros de diámetro en la tapa se llena con agua a una razón constante. Al encontrar el nivel a media altura, la razón de cambio de esta altura es de 30 cm/min. ¿Cuánto tardaría en llenarse el tanque?

9. *Llenando la piscina*. La orilla de una piscina es un rectángulo de 20 metros de largo y 10 *metros* de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 1.20 m a 2.70 m en un tramo horizontal de 12 m y después continúa al mismo nivel los 8 m restantes. La piscina se está llenando a razón de 130 litros/minuto de agua. Calcula, aproximadamente, la rapidez de cambio del nivel del agua en el momento en que la profundidad en la parte más honda es de 1.20 m, 1.50 m y 1.80 m.

10. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada contra un muro vertical. Si su base se empuja horizontalmente lejos de la pared a 2 m/s, ¿cuál será la rapidez con la que resbalará la parte superior de la escalera cuando la base esté a 4 m del muro?

11. Una piscina cuyas medidas son las indicadas en la figura siguiente, tiene agua hasta 4 pies de profundidad en el extremo mas hondo.



a. ¿Qué porcentaje de la piscina está llena?

b. Si se echa agua en ella a razón de 10 pies3/min. ¿a qué ritmo sube el nivel del agua en el instante para el cual hay agua hasta 4 pies de profundidad?

12. La arena que escurre por un agujero de un recipiente forma un montículo cónico cuya altura es igual al radio de su base. Cuando la altura del montículo es de 25 cm, ésta aumenta a razón de 15 cm/min. Calcula el volumen de arena que sale del agujero por minuto cuando la altura es de 25 cm.

13. Un farol se encuentra en lo alto de un poste de 16 pies de altura. Un niño de 5 pies de altura se aleja del poste a una velocidad de 4 pies/seg. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra cuando él se encuentra a 18 pies del poste? ¿Cuál es la tasa de crecimiento de su sombra?

14. La función de la población de un país es $P(T) = T^2 + 20T + 8000$. Calcula la razón de cambio instantáneo dentro 18 meses y en ¿cuánto cambia realmente el mes 18?

15. Cuando un disco metálico se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/seg. ¿Cuál es la rapidez de cambio del área del disco cuando el radio es de 2 cm?

16. Una escalera de 4 metros de largo está apoyada contra la pared de un edificio y su base comienza a resbalar. Cuando la base está a 3.7 metros del edificio, la base se aleja a razón de 1.5 m/seg.

- **a.** ¿Cuál es la razón de cambio del área del triangulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese instante?
- **b.** ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo entre la escalera y el suelo en ese instante?

17. El área de un triangulo equilátero disminuye a razón de 4 cm^2/min. Calcula la rapidez de variación de longitud de sus lados en el momento en que el área del triangulo es de 200 cm^2.

18. Una barra de metal tiene la forma de un cilindro circular recto. Cuando se calienta su longitud y su diámetro aumentan a razón de 0.005 cm/min y de 0.002 cm/min, respectivamente. ¿A qué razón aumenta el volumen de la barra en el instante en que mide 40 cm de largo y 3 cm de diámetro?

19. El radio de un círculo cambia a razón de $-\frac{2}{\pi}\frac{m}{seg}$. ¿Cual es la razón de cambio del área del círculo cuando $r = 10m$?

20. Un recipiente cilíndrico de radio r = 40 cm. Recibe agua a razón de 10 cm^3/seg. Calcular la rapidez con que se eleva el nivel del agua en el instante en que su profundidad es de 20 cm.

21. Un compás cuyas extremidades tienen una longitud de 50 cm desciende a razón de 10 cm/seg. Determina la velocidad con la cual se separan las patas del compás en el instante en que su extremo superior se encuentra a una distancia de 20 cm de altura.

22. Una persona observa un avión que vuela a una altura de 1000 m. Éste avanza horizontalmente, a razón de 100 m/s, con respecto al punto de observación. Para el instante en el cual el observador se encuentra a una distancia de 2000 m del avión.

- **a.** Calcula la velocidad con la cual el avión se aleja del observador.
- **b.** Calcula la variación con respecto al tiempo del ángulo de elevación del observador con respecto al avión.

Aplicando lo aprendido

1. *Cono de arena*. En un estanque de forma de cono circular recto de radio *R* y altura *H* se deja caer arena de tal forma que a medida que se llena el estanque se forman dos conos con alturas h_1 y h_2, las cuales están en la relación $h_1 : h_2 :: 1 : 3$, es decir, $\frac{h_1}{h_3} = \frac{1}{3}$. Si se dejan caer A metros cúbicos por segundo ¿con que velocidad sube el extremo superior de la pila de arena cuando la punta de la pila es *H*?

2. Dentro de 5 años la población se define $P(T) = 20 - \frac{6}{T+1}$miles de millones. Calcula:

- **a.** El crecimiento de la población dentro de un año.
- **b.** El crecimiento real de la población en el segundo año de funcionamiento.
- **c.** El crecimiento porcentual de la población en el noveno año de funcionamiento.
- **d.** ¿Qué sucederá con el crecimiento de la población en el largo plazo?

3. El volumen *V* (en litros) de CO_2 a 27° C está dado en términos de su presión *P* (en atmósferas) por la ecuación $V(P) = \frac{168}{P}$ litros.

- **a.** Calcula la razón promedio del cambio de volumen cuando la presión aumenta de 2 a 3 atm.
- **b.** Calcula la razón promedio del cambio de volumen cuando la presión aumenta de 2 a 2.1 atm.
- **c.** Aproxima a centésimas, la razón a la que aumenta el volumen cuando hay 2 litros.

UNIDAD III

DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

PRÁCTICA 20. Límites

Al resolver los siguientes límites se pretende familiarizar al alumno con algunos límites que utilizará para obtener la derivada de algunas funciones.

Introducción

Resolver los siguientes límites indicando todos los pasos, cuya forma es la del límite de Fermat: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, donde $x = a$ es la abscisa del punto dado y representa un punto de tangencia.

Nota

Recuerda las siguientes fórmulas de factorización:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Actividad 1

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$;

3. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;

4. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$;

5. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$;

6. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

7. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

8. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$;

9. $\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$;

10. $\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5}$.

Actividad 2

Con base en los ejercicios anteriores calcula los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$, donde a es un número real;

2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$, donde a es un número real.

PRÁCTICA 21. Derivadas de orden n

Con esta práctica se pretende calcular la derivada de funciones de 1º, 2º y 3º grado usando la definición en su representación:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ *, donde a es cualquier número real.*

Introducción

Utilizando la definición $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, obtener las derivadas de funciones del tipo $f(x)=cx^n$ con $n=1$, 2 y 3, y $c\neq 0$.

Nota

Recuerda las siguientes fórmulas de factorización:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Actividad 1

1. Obtener la derivada de $f(x)=cx$ con $c\neq 0$ en el punto indicado.

1. $f(x)=x$ en $x=3$;

2. $f(x)=x$ en $x=-10$;

3. $f(x)=3x$ en $x=-1$;

4. $f(x)=x$ en $x=½$;

5. $f(x)=-5x$ en $x=4$;

6. $f(x)=-3x$ en $x=-2$;

7. $f(x)=\frac{1}{3}x$ en $x=-1$;

8. $f(x)=\frac{1}{2}x$ en $x=2$;

9. $f(x)=-4x$ en $x=½$;

10. $f(x)=-\frac{1}{2}x$ en $x=⅓$.

2. Obtener la derivada de $f(x)=cx^n$ con $n=$ 2 y 3, y $c\neq 0$ en el punto indicado.

1. $f(x) = x^2$ en $x = \pi$;
2. $f(x) = x^2$ en $x = 3$;
3. $f(x) = -3x^2$ en $x = 2$;
4. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ en $x = 2$;
5. $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ en $x = \frac{1}{2}$;
6. $f(x) = 8x^3$ en $x = 2$;
7. $f(x) = 27x^3$ en $x = 2$;
8. $f(x) = 8x^3$ en $x = 3$;
9. $f(x) = 64x^3$ en $x = 1$;
10. $f(x) = 27x^3$ en $x = 4$.

Actividad 2

Con base en los ejercicios anteriores calcula la derivada.

1. $f(x) = cx$ en $x = a$ y $c \neq 0$;
2. $f(x) = cx^2$ en $x = a$ y $c \neq 0$;
3. $f(x) = cx^3$ en $x = a$ y $c \neq 0$;
4. $f(x) = cx^4$ en $x = a$ y $c \neq 0$.

PRÁCTICA 22. Más derivadas

Con esta práctica se pretende calcular la derivada como una función de algunas funciones de 1º 2º y 3º grado, usando la definición en su representación:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Introducción

Utilizando la definición $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, obtener las derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ con $n = 1$, 2, 3 y 4, y $c \neq 0$.

Nota:

Recuerda las siguientes fórmulas de factorización:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Actividad 1

1. Obtener la derivada de $f(x)$.

1. $f(x) = 5x$;

2. $f(x) = -3x$;

3. $f(x) = \frac{1}{2}x$;

4. $f(x) = -\frac{2}{3}x$;

7. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$;

8. $f(x) = -\frac{2}{5}x^2$;

9. $f(x) = 5x^3$;

10. $f(x) = -8x^3$;

5. $f(x) = 10x^2$;

6. $f(x) = -5x^2$;

11. $f(x) = \frac{1}{3}x^3$;

12. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3$.

Actividad 2

Con base en los ejercicios anteriores calcula la derivada.

1. $f(x) = cx$, con $c \neq 0$;

2. $f(x) = cx^2$, con $c \neq 0$;

3. $f(x) = cx^3$, con $c \neq 0$;

4. $f(x) = cx^4$, con $c \neq 0$.

PRÁCTICA 23. Equivalencia de la derivada y el límite de Fermat.

Con esta práctica se pretende calcular la derivada de algunas funciones utilizando las definiciones en su representación:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad y \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

donde a es cualquier número real.

Introducción

Utilizando las definiciones $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, obtener las derivadas de las funciones polinomiales que se indican.

Nota:

Considera las siguientes fórmulas de factorización:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Actividad 1

Obtener la derivada de $f(x)$, primero con la definición $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y posteriormente con $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1. $f(x) = 3x + 1$;

7. $f(x) = x^3 + x$;

2. $f(x)=x^2-x$;

3. $f(x)=x^2+x$;

4. $f(x)=x^2+2x+10$;

5. $f(x)=2x^2-x+5$;

6. $f(x)=2x^2+3x+1$;

8. $f(x)=x^3-x$;

9. $f(x)=x^3+2x+3$;

10. $f(x)=3x^3-2x+1$;

11. $f(x)=x^3+x^2$;

12. $f(x)=x^3+x^2+x$.

Actividad 2

Con base en los ejercicios anteriores calcula la derivada, donde b, c, m y n son números reales.

1. $f(x)=x^2+bx+c$, con $c\neq 0$;

2. $f(x)=mx^2+nx+c$, con $c\neq 0$;

3. $f(x)=mx^3-nx$, con $c\neq 0$;

4. $f(x)=mx^3+nx+c$, con $c\neq 0$;

5. $f(x)=mx^3+nx^2+c$, con $c\neq 0$;

6. $f(x)=mx^3+nx^2+cx$, con $c\neq 0$.

PRÁCTICA 24. Recta tangente a una función.

Se pretende utilizar las definiciones $m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *o bien* $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *para hallar la ecuación de la recta tangente de una función en un punto dado.*

Introducción

Se usará el límite de Fermat o la derivada (límite) para graficar funciones

Actividad 1

1. Grafica la función $f(x)=x^2$, posteriormente obtén la ecuación de la recta tangente a ésta en los puntos:

- **a.** $a=1$;
- **b.** $a=-1$;
- **c.** $a=\frac{1}{2}$;
- **d.** $a=0$.

En cada caso dibuja sobre la función la recta tangente. Para obtener la pendiente utiliza $m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, donde $x=a$ es la abscisa del punto dado que representa el punto de tangencia.

2. Repite lo anterior para la función $f(x)=x^2+2x$ en los puntos:

- **a.** $x=-2$;
- **b.** $x=0$;
- **c.** $x=-1$.

Ahora para obtener la pendiente utiliza la representación $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3. Realiza el mismo procedimiento aplicado en el punto 2 para la función $f(x) = -x^2 - 2x$:

a. $x = -2$;

b. $x = 0$;

c. $x = -1$.

4. Considera los ejercicios 2 y 3 y responde lo siguiente:

a. Para la función $f(x) = x^2 + 2x$, ¿qué coordenadas tiene el vértice?;

b. En la función $f(x) = x^2 + 2x$, el vértice representa un punto máximo o mínimo. Explica por qué.

c. Para la función $f(x) = -x^2 - 2x$, ¿qué coordenadas tiene el vértice?;

d. En la función $f(x) = -x^2 - 2x$, el vértice representa un punto máximo o mínimo. Explica por qué;

e. En la función, ¿cómo es el cambio de signo (de menos a más o de más a menos) de las pendientes de las rectas tangentes con respecto al vértice?;

f. En la función $f(x) = -x^2 - 2x$, ¿cómo es el cambio de signo (de menos a más o de más a menos) de las pendientes de las rectas tangentes con respecto al vértice?;

g. Considerando e) y f), ¿qué relación hay entre el cambio de los signos de las pendientes de las rectas tangentes y los puntos máximos y mínimos de una función?

Actividad 2

1. Obtener la ecuación de la recta tangente en el punto dado. Utiliza la definición: $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, donde $x = a$ es la abscisa del punto dado y representa un punto de tangencia.

1. $f(x) = cx^2$, con $c \neq 0$; **2.** $f(x) = x^2 + bx$, con $b \neq 0$.

2. Obtener la ecuación de la recta tangente en el punto dado $x = a$ (punto de tangencia). Utiliza la definición: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

1. $f(x) = bx^2 + cx$, con $b, c \neq 0$; **2.** $f(x) = cx^3$, con $c \neq 0$.

PRÁCTICA 25. Fórmulas de derivación. *Con esta práctica se pretende familiarizar al alumno en el uso de las fórmulas de derivación.*

Introducción

Aplicando las fórmulas de derivación obtener la derivada de las funciones indicadas y reducirlas hasta su mínima expresión.

Nota:

Considera que $u(x)=u$ y $v(x)=v$ son funciones que dependen de 'x' y que c es cualquier número real. Para simplificar utiliza la notación de Lagrange u' en lugar de la notación de Leibniz $\frac{d}{dx}u(x)$ o bien $\frac{du}{dx}$:

$$(c)'=0$$

$$(x)'=0$$

$$(u \pm v)'=u' \pm v'$$ [1]

$$(cu)'=cu'$$

$$(u)^n=nu^{n-1}u'$$

$$(uv)'=uv'+vu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

[1] Los signos de '±' indican que la derivada de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las derivadas.

Actividad 1

Calcula la derivada las siguientes funciones y reduce el resultado hasta su mínima expresión.

1. $f(x)=\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{3}{4}x^2-2x-1;$

2. $f(x)=\tfrac{3}{2}x^5-\tfrac{5}{3}x^3-3x^2+8x-\sqrt{2}\,;$

3. $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)\left(x^3-3\right);$

4. $f(t)=\left(t^2-2t\right)\left(t^3-3t^2+5\right);$

5. $f(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right);$

6. $f(s)=\left(s^2-s\right)\left(s^3-1\right);$

7. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2};$

8. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1};$

9. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1};$

10. $f(x)=\dfrac{2x^5-4x}{x-9};$

11. $f(x)=\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{1}{x^2};$

12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+x^4+x^2-5x\,.$

Actividad 2

Calcula la derivada las siguientes funciones y reduce el resultado hasta su mínima expresión.

1. $f(x)=\left(x-1\right)^5+(1+2x)^4+(x+1)^2\,;$

2. $f(x)=\left(x+1\right)^3(2+x)^2\,;$

3. $f(x)=\dfrac{\left(x^2+x+2\right)^2}{(-x+\sqrt{3})^2}\,;$

4. $f(x)=\dfrac{\left(x^2+x+2\right)^2}{(-x+\sqrt{3})^2}\,;$

5. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x^3}$;

6. $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 + x)} + \sqrt[7]{(x^3 - 5)^3}$;

7. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[5]{x^3}$;

8. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$;

9. $f(x) = \sqrt[3]{(-2x^4 - x^3)^2}\,\sqrt{(2x^4 + x^3)^3}$;

10. $f(t) = \dfrac{(-t^2 - 3t^2)^3}{\sqrt{t^3}}$.

PRÁCTICA 26. Fórmulas de derivación. (Continuación)

Continuar promoviendo (ver Práctica 6) habilidades en el uso de las fórmulas para derivar funciones.

Introducción

Aplicando las fórmulas de derivación obtener la derivada de las funciones indicadas y reducirlas hasta su mínima expresión.

Nota:

Considera que $u(x)=u$ y $v(x)=v$ son funciones que dependen de 'x' y que c es cualquier número real. Para simplificar utiliza la notación de Lagrange u' en lugar de la notación de Leibniz $\frac{d}{dx}u(x)$ o bien $\frac{du}{dx}$:

$$(c)'=0$$

$$(x)'=0$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$ [2]

$$(cu)'=cu'$$

$$(u)^n=nu^{n-1}u'$$

$$(uv)'=uv'+vu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

[2] Los signos de '±' indican que la derivada de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las derivadas.

Actividad 1

Calcula la derivada las siguientes funciones y reduce hasta donde te sea posible.

1. $g(x)=\sqrt[3]{x^3-x+1}$;

2. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{(x+3)^3}}$;

3. $f(x)=\sqrt{(x^2+5x-4)^5}$;

4. $f(x)=\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x)}$;

5. $f(t)=\sqrt{(2t^3+t)(t^2-3)}$;

6. $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{(x^2+3)^5}}$;

7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$;

8. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x}}$;

9. $f(x)=(x-1)^2\sqrt{x^2+2x}$;

10. $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)\left(x^3-3\right)^3$;

11. $f(x)=\dfrac{\left(x+5\right)^2}{\left(x-2\right)^2}$;

12. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x}}$.

PRÁCTICA 27. Recta tangente a una función (con derivadas)

Mediante el uso de la función derivada resolver problemas de cálculo de tangentes.

Introducción

Aplicando las fórmulas de derivación resuelve los problemas sobre cálculo de tangentes dada una función polinomial $f(x)$.

Nota:

Considera que $u(x)=u$ y $v(x)=v$ son funciones que dependen de 'x' y que c es cualquier número real. Para simplificar utiliza la notación de Lagrange u' en lugar de la notación de Leibniz $\frac{d}{dx}u(x)$ o bien $\frac{du}{dx}$:

$$(c)'=0$$

$$(x)'=0$$

$$(u \pm v)'=u' \pm v'$$ [3]

$$(cu)'=cu'$$

$$(u)^n=nu^{n-1}u'$$

$$(uv)'=uv'+vu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

[3] Los signos de '±' indican que la derivada de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las derivadas.

Actividad 1

Resolver los siguientes problemas, explicitando todos los pasos y argumentando tus respuestas.

1. Grafica la función $f(x) = x^2 - 2x$, posteriormente obtén la ecuación de la recta tangente a ésta en los puntos correspondientes:

a. $x = -2$;
b. $x = 1$;
c. $x = 3$.

En cada caso dibuja sobre la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente correspondiente.

2. Grafica la función $f(x) = x^3 + 1$, posteriormente obtén la ecuación de la recta tangente a ésta en los siguientes puntos de tangencia:

a. $P(-1, f(-1))$;
b. $P(0, f(0))$;
c. $P(2, f(2))$.

En cada caso dibuja sobre la gráfica de la función de $f(x)$ la recta tangente correspondiente.

3. Dada la función $f(x)$, hallar el punto de tangencia $P(x, f(x))$ sobre la función, de manera que la recta tangente en P tenga la pendiente indicada m_T (pendiente de la recta tangente en el punto P):

a. $f(x) = x^3$, para $m_T = 6$;
b. $f(x) = x^2 + 4x - 60$, para $m_T = 6$;
c. $f(x) = -x^2 - 3x + 10$, para $m_T = -7$.

Sugerencia: Si consideras necesario grafica $f(x)$.

Actividad 2

1. Grafica la función $f(x)=x^2+x$, posteriormente responde los siguientes incisos:

a. Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el siguiente punto de tangencia: $P(a, f(a))$;

b. Con base en a), obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$, si $a=\frac{1}{2}$;

c. Con base en a), Obtén y dibuja la ecuación de la recta tangente a $f(x)$, si $a=-\frac{1}{2}$.

2. Dada la función $f(x)=-2x^3+4x^2+3$:

a. Determinar la pendiente de la recta tangente en el punto $x=a$;

b. Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1,5)$ y $(2,3)$

c. Usando un software de tu elección grafica $f(x)$ y posteriormente dibuja en la misma pantalla las rectas tangentes obtenidas en b). Copia las gráficas en tu cuaderno.

3. Calcula la derivada las siguientes funciones y reduce hasta donde te sea posible.

1. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}+(2x-3)^2+\dfrac{3}{4}x^5$;

2. $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3}+\left(\dfrac{2}{3}x-3\right)(x-4)^2$;

3. $f(x)=(x+1)^2\sqrt{x^2-x}$;

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2-x}}$;

5. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}\sqrt{x^2-x}$;

6. $f(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$;

7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;

8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

9. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a}$, con a constante;

10. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a}$, con a constante.

PRÁCTICA 28. Aplicaciones.

Mediante el uso de la función derivada resolver problemas de cálculo de velocidades.

Introducción

Aplicando las fórmulas de derivación resuelve los problemas sobre cálculo de velocidades dada una función polinomial $f(x)$.

Notas:

Considera que $u(x) = u$ y $v(x) = v$ son funciones que dependen de 'x' y que c es cualquier número real. Para simplificar utiliza la notación de Lagrange u' en lugar de la notación de Leibniz $\frac{d}{dx}u(x)$ o bien $\frac{du}{dx}$:

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 0$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$ [4]

$$(cu)' = cu'$$

$$(u)^n = nu^{n-1}u'$$

$$(uv)' = uv' + vu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Recuerda que la ***velocidad promedio*** $\bar{v}(t)$ de una partícula se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo, con una función de movimiento $f(t)$:

---

[4] Los signos de '±' indican que la derivada de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las derivadas.

$$\bar{v}(t)=\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(t_{final})-f(t_{inicial})}{t_{final}-t_{inicial}}=\frac{f(t_f)-f(t_i)}{t_f-t_i}$$

Otra forma de expresar lo anterior es:

$$\bar{v}(t)=\frac{f(t_{inicial}+h)-f(t_{inicial})}{h}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Donde $h=t_{final}-t_{inicial}=t_f-t_i$ y $t_{final}=t_{inicial}+h=t+h$, con $t=t_{inicial}$.

La ***velocidad instantánea*** $v(t)$ de una partícula se define como el valor límite de la velocidad promedio cuando el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño, es decir, tiende a cero.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{t_{final}\to t_{inicial}}\frac{f(t_{final})-f(t_{inicial})}{t_{final}-t_{inicial}}=\lim_{t_f\to t_i}\frac{f(t_f)-f(t_i)}{t_f-t_i}$$

Otra forma de expresar lo anterior es:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_{inicial}+h)-f(t_{inicial})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Donde $h=t_{final}-t_{inicial}=t_f-t_i$ y $t_{final}=t_{inicial}+h=t+h$, con $t=t_{inicial}$.

Por lo tanto, la primera derivada de la función posición $f(t)$ es la velocidad instantánea $v(t)$ en el tiempo t. Simbólicamente: $f'(t)=v(t)$.

Actividad 1

Resolver los siguientes problemas, explicitando todos los pasos y argumentando tus respuestas.

1. La posición de una partícula que se mueve está dada en centímetros por la función $f(t)=8-1.5t^2$, donde t está en segundos:

a. Determina la distancia recorrida entre $t=2$ y $t=5$;

b. Determina la velocidad promedio entre $t=2$ y $t=5$;

c. Determina la velocidad instantánea en: $t=2$ y $t=5$;

d. Si ahora la posición de la partícula se describe por $f(t)=3t^2$, calcula la velocidad instantánea en $t=\frac{a}{2}$.

2. Un objeto se mueve según la función $s(t)=2+3t-t^2$, donde $s(t)$ está en metros y t en segundos:

a. Determina la velocidad promedio entre $t=2$ y $t=10$;

b. Determina la velocidad instantánea en: $t=2$, $t=5$, $t=10$ y $t=\frac{a}{2}$;

Nota:

Para el siguiente problema recuerda de tus cursos de física que: cuando se omite la resistencia del aire todos los objetos caen hacia la superficie de la tierra bajo la influencia de la aceleración de la fuerza de gravedad (aproximadamente $g=9.8\frac{m}{s^2}$). Esta ley fue formulada por *Galileo Galilei*, la cual describe que el espacio recorrido $\boldsymbol{s}$ durante el tiempo $\boldsymbol{t}$ por un cuerpo que cae libremente en el vacío se expresa simbólicamente como: $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

3.


La Torre CN en Toronto es el edificio autoestable más alto del mundo en la actualidad.

Supongamos que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN en Toronto, 450 m por encima del nivel del suelo.

Encuentra la velocidad de la pelota en los instantes: 3, 4 y 5 segundos.

Modificado (Stewart, 2008, p. 85).

4. Un objeto cuyo movimiento se describe por la siguiente ley: $s(t) = 1.5t^2 + 2t + 12$, donde s es el camino recorrido (en metros) y t el tiempo (en segundo). Determinar la velocidad instantánea a los 10 segundo.

Actividad 2

1.

Supongamos que se deja caer un objeto de la torre Latinoamericanana desde su parte más alta, la cual se encuentra aproximadamente a 182 m. Si se omite la resistencia del aíre, cuál sería su velocidad instantánea en el instante $t = a$ y $t = a + 1$ segundos.

2. Un objeto cuyo movimiento se describe por $s(t) = 0.5t^3 + 2t^2 + 3t + 11$, donde s es el camino recorrido (en metros) y t el tiempo (en segundo). Determinar la velocidad instantánea a los $t = n$ segundo.

PRÁCTICA 29. Derivada (con geogebra)

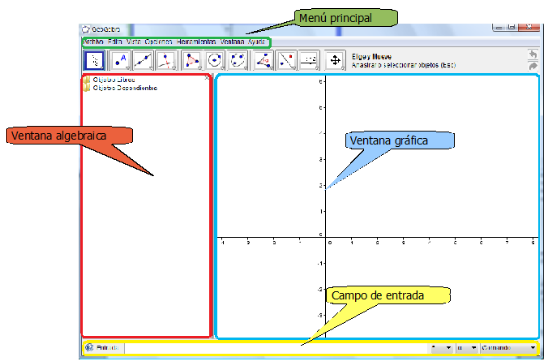
Con ayuda de GeoGebra obtener la derivada utilizando la definición

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Introducción

Con la ayuda de algunos comandos de *GeoGebra* es posible resolver algunos problemas relacionados con la derivación de funciones. Esto permite hacer cálculos en forma rápida, corroborar nuestros resultados o bien simplificar nuestras soluciones, entre otras cosas.

Notas: Utilizando el *Campo de entrada en GeoGebra* y los siguientes ejemplos resuelve los ejercicios propuestos.



Cálculo de límites

Calcula el límite de una función cuando x *tiende a un valor específico*.

Comando: Límite(<Función>, <Valor>)

Ejemplos:

Calcular el límite de $\displaystyle Lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Comando: Límite((x² - 4) / (x - 2), 2)

Calcular el límite de $\displaystyle Lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$. Comando: Límite((x³ - 27) / (x - 3), 3)

Actividad 1

Utilizando la definición $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, y el Comando: Límite(<Función>, <Valor>) obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x)=2x^2$ en $x=2$;
2. $f(x)=x^2+2x$ en $x=3$;
3. $f(x)=-3x^2+1$ en $x=5$;
4. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x$ en $x=-3$;
5. $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+1$ en $x=½$;
6. $f(x)=8x^3$ en $x=2$;
7. $f(x)=27x^3-x^2$ en $x=-1$;
8. $f(x)=8x^3-3x^2$ en $x=4$;
9. $f(x)=-2x^3-3x^2+\frac{1}{2}x$ en $x=1$;
10. $f(x)=-\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{3}x+1$ en $x=0$.

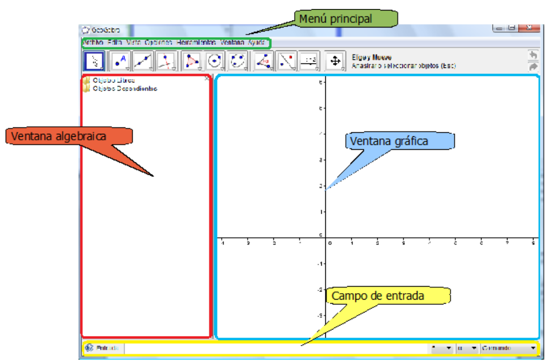
PRÁCTICA 30. Derivada (continúa con geogebra)

Utilizando GeoGebra obtener la derivada de las funciones indicadas.

Introducción

Con la ayuda de algunos comandos de *GeoGebra* es posible resolver algunos problemas relacionados con la derivación de funciones. Esto permite hacer cálculos en forma rápida, corroborar nuestros resultados o bien simplificar nuestras soluciones, entre otras cosas.

Notas: Utilizando el *Campo de entrada en GeoGebra* y los siguientes ejemplos resuelve los ejercicios propuestos.



Cálculo de derivadas

El comando proporciona la derivada y su grafica de la función indicada.

Derivada(<Función>)

Ejemplos:

Calcular la derivada de $f(x)=(x-1)^3+(1+3x)^2$. Comando: Derivada((x - 1)³ + (1 + 3x)²)

Calcular la derivada de $f(x)=\sqrt{x-2}+x^2$. Comando: Derivada(sqrt(x - 2) + x²)

Actividad 1

Utilizando el comando Derivada(<Función>) proporciona la derivada y su grafica de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 + 2x + 10$;
2. $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$;
3. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x - 1$;
4. $f(x) = (x+1)^3 + (1+x)^2 + (x-1)$;
5. $f(x) = \dfrac{2x^5 - 4x}{x-9}$;
6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} + x^4 + 2x^2 - 5x + 10$;
7. $f(x) = \sqrt{x+2} + x^2 - x$;
8. $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$;
9. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} - x^3$;
10. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^3}$;
11. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^3} + 2x^3 - 2x$;
12. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1} + \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^3}$.

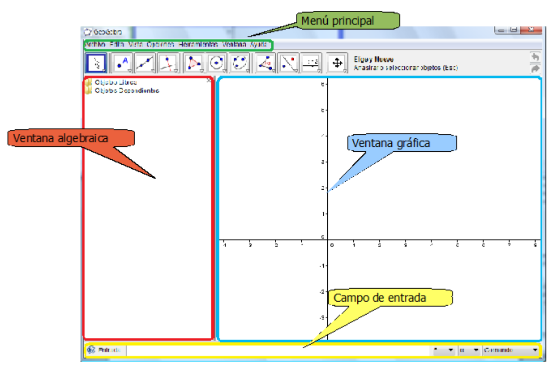
PRÁCTICA 31. Derivada (Continúa con geogebra)

Utilizando GeoGebra obtener la derivada de orden n de las funciones indicadas.

Introducción

Con la ayuda de algunos comandos de *GeoGebra* es posible resolver algunos problemas relacionados con la derivación de funciones. Esto permite hacer cálculos en forma rápida, corroborar nuestros resultados o bien simplificar nuestras soluciones, entre otras cosas.

Notas: Utilizando el *Campo de entrada en GeoGebra* y los siguientes ejemplos resuelve los ejercicios propuestos.



Cálculo de derivadas de orden *n*

Da por resultado la derivada del número de orden indicado (primera derivada, segunda, tercera, etc.) de la función respecto de la variable principal y su grafica.

Derivada(<Función>, <Número>)

Ejemplos:

Calcular la segunda derivada de $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + 3$.

Comando: Derivada($x^5 + 2x^4 - x^2 - 3$, 2)

Calcular la primera derivada de $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Comando: Derivada((sqrt(x) - 1) / (sqrt(x) + 1), 1)

Calcular la primera segunda derivada de $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Comando: Derivada((sqrt(x) - 1) / (sqrt(x) + 1), 2)

Actividad 1

Utilizando el comando Derivada(<Función>, <Número>) proporciona la derivada y la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ con $x=2$;

2. $f(x)=x^4-2x^2+2x-1$ con $x=3$;

3. $f(x)=x^4-2x^3+x^2-x$ con $x=4$;

4. $f(x)=(x+1)^3+(1+x)^2$ con $x=3$;

5. $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-9}$ con $x=2$;

6. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ con $x=2$;

7. $f(x)=\sqrt{x+2}$ con $x=3$;

8. $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$ con $x=3$;

9. $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ con $x=2$;

10. $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+2}}$ con $x=3$;

11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$ con $x=2$;

12. $f(x)=\frac{10}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+x^3-x$ con $x=4$.

UNIDAD IV

APLICACIONES

PRÁCTICA 32. El mejor bote cilíndrico

Se analizan problemas para determinar la función que los modela y aplicar los procedimientos adecuados para obtener soluciones.

Introducción

En los siguientes problemas se aplicarán tablas y gráficas para determinar los valores de la variable independiente con los que se obtiene el máximo o mínimo de la función que modela el problema.

Actividad 1

Una compañía petrolera desea vender aceite en envases cilíndricos (botes) de 5 litros. Para que los botes tengan costo de producción bajo, para esto la cantidad de hoja de lata que se requiere para su fabricación debe ser mínima. ¿Cuáles deben ser las medidas de los botes?

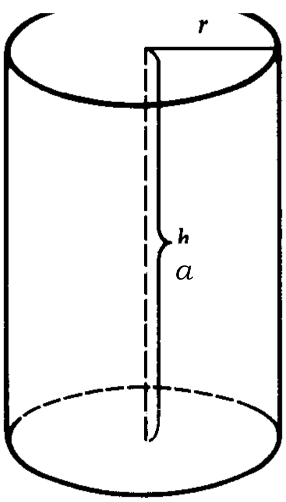


Figura 6.15

a) Análisis del problema
   1. ¿Cuáles son los datos?
   2. ¿Cuál es la incógnita?
   3. ¿Cómo se relacionan los datos y la incógnita?

b) Plan de trabajo.
   1. Escribe las instrucciones que deberá seguir otra persona para resolver el problema. No hagas los cálculos.
   2. Escribe las fórmulas
   3. Escribe el volumen que corresponde a 5 litros en centímetros cúbicos.

c) Ejecución del plan de trabajo
   1. Lleva a cabo lo indicado en las instrucciones que escribiste en el plan de trabajo.

2.
3. Revisa que cada paso esté correcto.

d) Revisión de resultados

1. Revisa que el plan de trabajo permita obtener los resultados deseados.
2. Revisa cada paso que llevaste a cabo.
3. Comprueba tus resultados.

Actividad 2

Resuelve el siguiente problema de acuerdo con lo indicado en la **Actividad 1**:

Se requiere construir un corral rectangular, con la mayor área posible, usando una cerca y aprovechando una barda. El material disponible para formar la cerca alcanza para construir 40 metros de cerca. Hallar las dimensiones del corral.

PRÁCTICA 33. Crecimiento de una función usando una tabla.

Se analiza una función para determinar los valores de la variable independiente en los que los valores de la función aumentan y en los que disminuyen.

Introducción

Se propone el análisis de una función por medio de tablas y gráficas para localizar los intervalos en donde la función es creciente, decreciente o constante.

Actividad 1

1. Considera la función $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$.

- **a.** Construye una tabla de valores, usa valores positivos también valores negativos (no todos enteros) para la función. (Puedes usar una hoja de cálculo)
- **b.** Factoriza la función.
- **c.** Encuentra las raíces de la función.
- **d.** Determina los intervalos en los que las raíces de la función dividen al eje x.
- **e.** Con base en la tabla del inciso a), determina el signo de los valores de cada factor en cada uno de los intervalos.
- **f.** ¿En qué intervalos los valores de la función son positivos? Es decir, ¿En qué intervalos la curva está por arriba del eje **X**?
- **g.** ¿En qué intervalos los valores de la función son negativos? ¿En qué intervalos la curva está por abajo del eje **X**?

2. Completa la siguiente tabla de factores/intervalos, con los intervalos, los factores y los signos faltantes:

Factores		$x + 2$		$f(x)$

intervalos				
$(-\infty, -3)$				$-$

- **a.** Con base en la información obtenida determina los intervalos donde la función es creciente.
- **b.** Con base en la información obtenida determina los intervalos donde la función es decreciente.

3. Usa GeoGebra para graficar la función.

- **a.** Compara la información que obtuviste en los puntos del inciso b) con la gráfica de la función.
- **b.** Escribe tus conclusiones.

Actividad 2

1. Si f se define sobre $\mathbb{R}$, mediante la fórmula $f(x) = x^2 - 2x + 3$,

- **a.** Sigue las instrucciones que se indican en la actividad 1.
- **b.** ¿Para qué valores de x disminuye f?
- **c.** ¿Para qué valores de x aumenta f?
- **d.** Escribe tus conclusiones.
- **e.** ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos máximos y los puntos mínimos relativos? (A estos puntos se les llama puntos extremos.)

Actividad 3

1. Considera la función cual $f(x) = x + \frac{1}{x}$, suponiendo que $x > 0$, es decir, tiene como dominio los números reales positivos.

- **a.** Sigue las instrucciones que se indican en la actividad 1.
- **b.** Encuentra las tendencias y los extremos de la función f.

2. Considera la función cual $f(x) = x + \frac{1}{x}$, suponiendo que $x < 0$, es decir, su dominio consta de los números reales negativos.

a. Sigue las indicaciones de en la actividad 1.

b. Encuentra las tendencias y los extremos de la función f.

3. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos máximos y los puntos mínimos relativos? (A estos puntos se les llama puntos extremos.).

PRÁCTICA 34. Crecimiento de una función y la relación con su derivada.

Se relacionan la gráfica una función y la de su primera derivada para identificar el crecimiento de la función.

Introducción

Al construir una tabla que contenga información de una función y de su derivada, además de la comparación de las gráficas correspondientes se puede identificar la información con respecto al crecimiento de la función original que proporciona su derivada.

Actividad 1

1. Considera la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$
   - **a.** Construye una tabla de valores, usa valores positivos y también valores negativos (no todos enteros) para la función. (Puedes usar una hoja de cálculo)
   - **b.** Factoriza la función.
   - **c.** Encuentra las raíces de la función.
   - **d.** Determina los intervalos en los que las raíces de la función dividen al eje **X**.
   - **e.** Con base en la tabla del inciso a), determina el signo de los valores de cada factor en cada uno de los intervalos.
   - **f.** ¿En qué intervalos los valores de la función son positivos? Es decir, ¿En qué intervalos la curva está por arriba del eje **X**?
   - **g.** ¿En qué intervalos los valores de la función son negativos? ¿En qué intervalos la curva está por abajo del eje **X**?

2. Construye una tabla de factores/intervalos.
    a. Con base en la información obtenida determina los intervalos donde la función es creciente.
    b. Con base en la información obtenida determina los intervalos donde la función es decreciente.
3. Usa GeoGebra para graficar la función.
    a. Compara la información que obtuviste en los puntos **1.** y **2.** del inciso b) con la gráfica de la función.
    b. Escribe tus conclusiones.

Actividad 2

1. Considera la función de la actividad 1:
    a. Calcula su derivada.
    b. Construye una tabla de valores, usa valores positivos y también valores negativos (no todos enteros) para la derivada de la función. (Puedes usar una hoja de cálculo)
    c. Factoriza la derivada de la función.
    d. Encuentra las raíces de la derivada de la función.
    e. Determina los intervalos en los que las raíces de la derivada de la función dividen al eje **X**.
    f. Con base en la tabla determina el signo de los valores de cada factor en cada uno de los intervalos.
    g. ¿En qué intervalos los valores de la derivada de la función son positivos? Es decir, ¿En qué intervalos la curva está por arriba del eje **X**?
    h. ¿En qué intervalos los valores de la derivada de la función son negativos? ¿En qué intervalos la curva está por abajo del eje **X**?
2. Comparando la información
    a. Compara la información de la función con la información de su derivada.
    b. ¿Si la función tiene un máximo en un valor de x, cómo es la derivada en ese valor x?

c. Si la función tiene un mínimo en un valor de x, ¿cómo es la derivada en ese valor x?

d. Redacta un procedimiento para determinar el máximo o el mínimo de una función.

Actividad 3

Para cada función que se menciona (con dominio en $\mathbb{R}$ y contradominio en $\mathbb{R}$) aplica las instrucciones que se indican:

1. $f(x) = 4x^5 – 5x^4 – 40x^3$

2. $f(x) = x^3 – 3x^2 – 24x$

- **a.** Siguiendo el procedimiento que redactaste en la **Actividad 2**, determina las coordenadas de sus puntos extremos.
- **b.** Grafica la función.
- **c.** Compara tus resultados con la información que proporciona la gráfica.
- **d.** Aplica lo que indican las **Actividades 1** y **2** de la práctica.
- **e.** Escribe tus conclusiones.

PRÁCTICA 35. Crecimiento de una función usando su primera derivada.

Se graficará una función con su derivada para identificar el crecimiento de una función por medio de su primera derivada usando la relación entre ambas gráficas.

Introducción

Por medio del análisis de la gráfica de una función, el alumno comprenderá la relación que existe entre la función original y su primera derivada. Analizará por medio de preguntas y elaboración de tablas, toda la información sobre el comportamiento de la función.

Actividad 1

Construcción de una función en GeoGebra

1. En la línea de entrada escribe:

- **a.** $a = 1$;
- **b.** $b = 0$;
- **c.** $c = 0$;
- **d.** $d = 0$;
- **e.** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- **f.** Deriva la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nómbrala como $g(x)$.
- **g.** Escribe en la línea de entrada la expresión de $g(x)$.

2. Modifica los valores de a, b, c y d, uno por uno, y regresándolo al valor inicial, aumentándolo y disminuyéndolo. Se llaman parámetros a las constantes a, b, c y d.

- **a.** Escribe lo que observas en la gráfica de $f(x)$.
- **b.** Escribe lo que observas en la gráfica de $g(x)$.

c. ¿Se relacionan las raíces de la derivada $g(x)$ con la función $f(x)$?

d. Relaciona lo que observas en $f(x)$ con lo que observas en $g(x)$.

3. Modifica los cuatro parámetros con los valores que escojas.

a. Escribe lo que observas en la gráfica de $f(x)$.

b. Escribe lo que observas en la gráfica de $g(x)$.

c. Relaciona lo que observas en $f(x)$ con lo que observas en $g(x)$.

Actividad 2

1. Modifica los valores de a, b, c y d para que se obtenga la gráfica de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 16x - 12$;

b. $f(x) = x^3 - 13x - 12$;

c. $f(x) = x^3 - 13x - 20$;

d. $f(x) = (x - 2)^2 - 4$. (Sugerencia: desarrolla el binomio al cuadrado y simplifica.).

2. Para cada una de las funciones del punto 1:

a. Factorízala.

b. Calcula su derivada.

c. Determina las raíces de la derivada.

d. Para estas funciones, las raíces de la derivada dividen al eje **X** en tres intervalos, indícalos.

e. Determina el signo de los valores de la derivada en cada uno de los intervalos.

f. ¿Cómo es la función en los intervalos en que la derivada es positiva?

g. ¿Cómo es la función en los intervalos en que la derivada es negativa?

h. ¿Cómo son los puntos de la función que tienen coordenada x igual a una de las raíces de la derivada?

Actividad 3

1. Considera la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   a. Calcula la derivada de f.

   b. Determina los intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente.

   c. Calcula las raíces de la primera derivada.

   d. Determina las coordenadas de sus puntos extremos.

PRÁCTICA 36. Concavidad de una función

El propósito aquí es relacionar la concavidad de la función con su segunda derivada.

Introducción.

Se estudiará la concavidad de una función como consecuencia del estudio de la segunda derivada.

Actividad 1

Construcción de una función en GeoGebra

1. En la línea de entrada escribe:
   - **a.** $a = 1$;
   - **b.** $b = 0$;
   - **c.** $c = 0$;
   - **d.** $d = 0$;
   - **e.** $e = 0$.
   - **f.** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

2. Deriva la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ y nómbrala como $g(x)$.
   - **a.** Deriva la función $g(x)$ y nómbrala como $h(x)$.
   - **b.** Escribe en la línea de entrada la expresión de $g(x)$, que es la primera derivada de $f(x)$.
   - **c.** Escribe en la línea de entrada la expresión de $h(x)$, que es la segunda derivada de $f(x)$.
   - **d.** ¿Cómo se relacionan las raíces de la derivada $g(x)$ con la función $f(x)$?
   - **e.** ¿Cómo son los puntos de la función que tienen coordenada x igual a una de las raíces de la primera derivada?
   - **f.** ¿Cómo se relacionan las raíces de la segunda derivada $h(x)$ con la primera derivada $g(x)$?

g. ¿Cómo se relacionan las raíces de la segunda derivada $h(x)$ con la función $f(x)$?
h. ¿Cómo son los puntos de la función que tienen coordenada x igual a una de las raíces de la segunda derivada?

3. Modifica los valores de a, b, c, d, y e, uno por uno, aumentándolo y disminuyéndolo, luego regresándolo al valor inicial.
   a. Escribe lo que observas en la gráfica de $f(x)$.
   b. Escribe lo que observas en la gráfica de $g(x)$.
   c. Escribe lo que observas en la gráfica de $h(x)$.
   d. Relaciona lo que observas en $f(x)$ con lo que observas en $g(x)$.
   e. Relaciona lo que observas en $g(x)$ con lo que observas en $h(x)$.
   f. Relaciona lo que observas en $f(x)$ con lo que observas en $h(x)$.
   g. Escribe un resumen de tus observaciones.

Actividad 2

Para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x)=6x+33x-30x+100$
2. $g(t)=\sqrt[3]{t^2}(2t-1)$
3. $R(w)=\frac{w^2+1}{w^2-w-6}$
   a. Determina los intervalos donde la función es creciente.
   b. Determina los intervalos donde la función es decreciente.
   c. Determina la concavidad de la función en cada intervalo.
   d. Determina los puntos máximos (relativos).
   e. Determina los puntos mínimos (relativos).
   f. Determina los puntos de inflexión.
   g. Traza la gráfica de la función.
   h. Traza la gráfica de la primera derivada de la función.
   i. Traza la gráfica de la segunda derivada de la función.

Notas

1. Un punto de inflexión es aquel en el que antes de él la concavidad de la función tiene un signo y después la concavidad tiene el signo contrario.

2. A los máximos, mínimos y puntos de inflexión se les llama puntos críticos.

PRÁCTICA 37. Criterio de la primera derivada

La primera derivada de una función nos permite conocer algunas de sus propiedades como su crecimiento, si la función tiene máximos o mínimos relativos. También permite identificar cuando el punto crítico es máximo o mínimo (relativo).

Introducción

Los métodos que sirven para la determinación de máximos y mínimos relativos de una función es una herramienta muy poderosa que nos permite resolver problemas de optimización. Existen dos criterios (métodos) para identificar los máximos y los mínimos relativos de una función, aquí se presenta el criterio de la primera derivada.

Actividad 1

1. Para la función $g(t)=2t^3+3t^2-12t+4$ aplica los siguientes pasos:

- **a.** Deriva la función.
- **b.** Encuentra las raíces de la derivada.
- **c.** Resuelve la ecuación resultante.
- **d.** ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de la función cuya primera coordenada es una de las raíces de su derivada? A dichos puntos se les llama puntos críticos.
- **e.** Toma valores de x cercanos y menores a una de las raíces de la derivada.
- **f.** Evalúa la derivada en los valores de x que seleccionaste y determina el signo de la derivada.
- **g.** Repite los pasos ***e*** y ***f*** para cada una de las raíces de la derivada,
- **h.** Toma valores de x cercanos y mayores a una de las raíces de la derivada.
- **i.** Grafica la función.

j. Para cada punto crítico indica el signo de la derivada en valores anteriores y valores posteriores a la coordenada x del punto crítico, mencionando si es un mínimo o un máximo relativo.

k. ¿Cuándo el punto crítico será un máximo (relativo) y cuando un mínimo (relativo)?

2. Para la función $f(x) = 4x^2 + 2x + 2$ repite todos los pasos del inciso a). A este procedimiento se le conoce como el criterio de la primera derivada.

Actividad 2

1. Redacta el criterio de la primera derivada para una función f con dominio en $\mathbb{R}$ y contradominio en $\mathbb{R}$. (Simbólicamente se escribe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)
2. Aplica el método anterior (llamado criterio de la primera derivada) para que encuentres los máximos y los mínimos de cada función:
   - **a.** $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x - 1.$
   - **b.** $f(x) = \frac{x}{x-1}$
   - **c.** $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Actividad 3

1. Determina los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:
   - **a.** $f(x) = x^2 + 3$
   - **b.** $f(x) = 2x^3 + x^2$
   - **c.** $f(x) = \frac{1}{x+1}$
2. Resuelve el siguiente problema

   Una fabricante de zacates para bañarse puede vender 1000 zacates por mes a \$15.00 cada uno. Él observa que si baja el precio en 50 centavos podrá vender 10 piezas más. Calcula cuántas piezas se deben vender para obtener la utilidad máxima y cuál sería el ingreso al venderlas.

PRÁCTICA 38. Criterio de la segunda derivada

Establecer un criterio que nos permita determinar los máximos y mínimos de una función usando su segunda derivada.

Introducción

Es signo de la concavidad de una curva nos indica si la curva (en el plano) se “dobla” hacia arriba o hacia abajo. Así, si la curva se “dobla” hacia abajo entonces hay un punto máximo (relativo); en caso de que la curva se “doble” hacia arriba, entonces se tendrá un punto mínimo (relativo). El signo de la concavidad lo proporciona la segunda derivada, luego usándola se puede determinar el tipo de punto crítico, incluidos los puntos de inflexión.

Actividad 1

a) Considera la siguiente función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con regla de correspondencia:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$$

- **a.** Deriva la función.
- **b.** Encuentra las raíces de la derivada.
- **c.** Sustituye las raíces de la derivada en $f(x)$. Obtén las coordenadas del (los) punto(s) resultante(s).
- **d.** Aplica el criterio de la primera derivada para determinar el tipo de puntos críticos que obtuviste.
- **e.** Calcula la segunda derivada de la función.
- **f.** Evalúa en la segunda derivada las raíces de la primera derivada y observa el signo de la segunda derivada en cada uno de esos valores.
- **g.** ¿Qué signo tiene la segunda derivada en cada una de las raíces de la derivada?
- **h.** De acuerdo con el signo de la segunda derivada en las raíces de la primera derivada, indica el tipo de punto crítico en cada caso.

i. ¿Coincide este resultado con lo que hallaste en el criterio de la primera derivada?

j. Usa GeoGebra para graficar la función, su primera derivada y su segunda derivada y compara con los resultados que obtuviste.

b) Calcula para cada una de las siguientes funciones sus puntos críticos mediante el criterio de la segunda derivada. Grafícalas. Compara soluciones con el criterio de la primera derivada. ¿Qué observas?

a. $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x - 1$.

b. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

c. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Actividad 2

Considera las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$;

b. $f(x) = x^2 + 3$;

c. $f(x) = 2x^3 + 4x^2$;

d. $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

i. Usa el criterio de la primera derivada para calcular sus puntos críticos.

ii. Usa el criterio de la segunda derivada para calcular sus puntos críticos.

iii. Grafica cada función, su derivada y su segunda derivada.

iv. Escribe tus conclusiones.

Actividad 3

1. Encuentra los puntos críticos de la función $f(x) = x(x-10)^{\frac{3}{4}}$.

2. Demuestra que la expresión general de una función cúbica $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con regla de correspondencia: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un único punto de inflexión y tres formas posibles, dependiendo de si

   a. $b^2 > 3ac$

   b. $b^2 = 3ac$

   c. $b^2 < 3ac$.

   d. Grafica cada caso.

3. Contesta las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué ocurre en una función f(x) en la que su segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$?

   b. ¿Podemos decir que $si\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$, entonces *f(x)* tiene en x un punto de inflexión?

   c. ¿Se puede afirmar que si en x la función *f(x)* tiene un punto de inflexión, entonces la segunda derivada $f''(x) = 0$?

   d. ¿Se puede decir que ambos enunciados son correctos?

   e. Usa la función $f(x) = x^4$ para contrastar tus conjeturas.

PRÁCTICA 39. Aplicación de los criterios de la la primera y segunda derivada.

Aplicar los procedimientos vistos en el curso para determinar la gráfica de una función, límites, cálculo de raíces, hasta los criterios de primera y segunda derivada para localizar los puntos críticos.

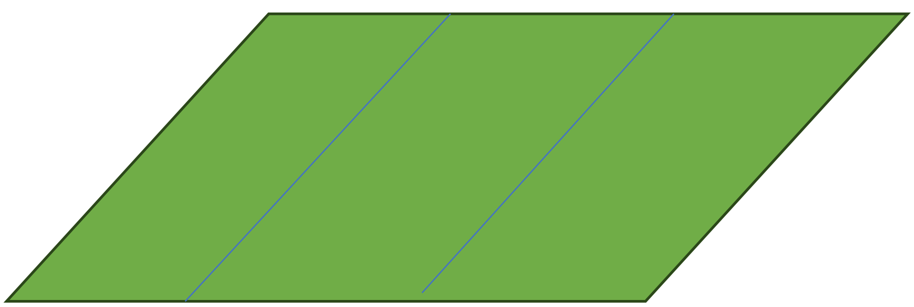
Introducción

Uno de los usos principales del proceso de diferenciación es encontrar las condiciones en que el valor de la función se vuelve máximo o mínimo. Esto es a menudo extremadamente importante en cuestiones económicas y de ingeniería, donde es más deseable saber qué condiciones harán que el costo de trabajo sea mínimo o que la eficiencia sea máxima.

Actividad 1

Considera el siguiente problema:

Un terreno rectangular ha de cercarse en tres porciones iguales al dividir cercas paralelas a dos lados.



Si el área a cercar es de 4000 m^2, encuentre las dimensiones de terreno que requiere la cantidad mínima de cerca.

Para resolverlo (siguiendo lo propuesto por George Polya):

a) Lee el problema tres veces:

i. La primera lectura es para que conozcas de que trata el problema. ¿Puedes escribir de que trata de manera breve sin mencionar datos?

ii. La segunda lectura es para que identifiques los datos que se mencionan en el problema (debes considerar las figuras como parte de los datos) y lo que debes calcular. Menciona los datos y la incógnita.

iii. La tercera lectura es para que identifiques las relaciones entre los datos, por ejemplo, ¿se relacionan la longitud de cada lado con el área del terreno? Menciona todas las relaciones entre los datos del problema y también las relaciones con la incógnita. Si es necesario dibuja una figura y coloca sobre ella los datos que conoces y con algún símbolo representa la incógnita que debes encontrar.

b) Elaboración de un plan de trabajo

i. Escribe una lista de lo que debes hacer.

ii. Determina las incógnitas intermedias que debes calcular.

iii. Determina las fórmulas que usarás.

iv. Determina los cálculos que debes hacer y el orden en que debes hacerlos.

v. Revisa si seguir los pasos es suficiente para resolver el problema.

c) Ejecución del plan

i. Sigue los pasos que determinante en el inciso anterior.

ii. Revisa si no cometiste algún error en el diseño del plan.

iii. Revisa si no cometiste algún error en los cálculos.

iv. Revisa si las fórmulas que usaste son correctas.

d) Revisión de los resultados

i. Sustituye tus resultados en el problema y revisa si son coherentes con la información que tiene dicho problema.

ii. Si encontraste algo que no concuerda revisa tu procedimiento.

iii. Genera un problema parecido cambiando un poco la información que proporcionó el problema.

Actividad 2

Problema:

Se requiere elaborar cajas rectangulares a partir de cartones cuyas medidas son 21.6 cm por 28 cm. Para esto se recortan cuadrados iguales en las cuatro esquinas y las “cejas resultantes se doblan hacia arriba para formar la caja (se unen con cinta adherible). ¿De qué longitud deben ser los lados de los cuadrados para que la caja tenga volumen máximo? ¿Cuál será el volumen de dichas cajas?

- **a.** Sigue los pasos de la actividad 1.
- **b.** Considera que los datos son letras, es decir, el ancho es a y el largo del cartón es b, resuelve el problema con esos datos.

Actividad 3

Resuelve los siguientes problemas:

1. Se desean elaborar botes cilíndricos de aluminio con capacidad de un litro. ¿Cuáles serán sus medidas para que su superficie sea la mínima?
2. Una central eléctrica está situada en una ribera de un río que en esa parte está recto que mide a metros de ancho. Una fábrica está situada en la orilla opuesta del rio, b metros río abajo del punto A, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta p pesos por metro tender el cable bajo el agua y q pesos por metro en tierra?
3. Inscribir en una esfera, un cilindro:
   - **a.** cuyo volumen sea un máximo;
   - **b.** cuya área lateral sea máxima;
   - **c.** cuya superficie total sea máxima.

BIBLIOGRAFÍA

Hughes Hallett, Deborah, *et. al*. (2000). *Cálculo*. CECSA.

Leithold, Louis. (1998). *El Cálculo*. México: Oxford University Press.

Ron Larson; Bruce Edwards. (2016). *Cálculo Tomo I*. Editorial: Cengage Learning.

Stewart, James. (2008). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas.* México: CENGAGE-Learning.

Swokowski, Earl. W; Cole, Jeffery. A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: CENGAGE-Learning.